N. PISKOUNOV

cálculo diferencial e integral

volume I

N. PISKOUNOV

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

VOLUME I

TRADUÇÃO DE:

ANTÓNIO EDUARDO PEREIRA TEIXEIRA
Licenciado em Economia (U. P.)
Contabilista diplomado (I. C. P.)

MARIA JOSÉ PEREIRA TEIXEIRA
Contabilista diplomada (I. C. P.)

12.ª EDIÇÃO EM LÍNGUA PORTUGUESA

EDIÇÕES LOPES DA SILVA — PORTO — 1988

Título da 4.ª edição do original russo

Н. С. ПИСКУНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

ТОМ I

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

Dedicamos este nosso trabalho aos nossos queridos pais e irmãs e duma maneira geral aos familiares que mais de perto nos acompanham.

O tradutor dedica ainda esta tradução, em especial, aos queridos colegas Maria Luísa e José Alves Baptista que sempre o acompanharam nos seus estudos superiores, nas matérias versadas na presente obra e ainda a todos os queridos alunos, que directa ou indirectamente, contribuiram para a prossecução desta tradução.

OS TRADUTORES

ÍNDICE

CAPITULO I

Número, variável, funções

CAPITULO II

Limite e continuidade das funções

CAPITULO III

Derivada e diferencial

CAPITULO IV

Teoremas relativos às funções deriváveis

CAPITULO V

Estudo da variação das funções

CAPITULO VI

Curvatura duma curva

CAPITULO VII

Números complexos. Polinómios

CAPITULO VIII

Funções de várias variáveis

CAPITULO IX

Aplicações do cálculo diferencial na geometria do espaço

CAPITULO X

Integral indefinido

CAPITULO XI

Integral definido

CAPITULO XII

Aplicações geométricas e mecânicas do integral definido

Anexo I

Anexo II

PREFÁCIO

A 3.ª edição em língua francesa conserva como essencial o conteúdo da 2.ª edição. Certos capítulos foram profundamente revistos e completados, em especial aqueles que tratam de certos ramos das matemáticas modernas, cujo conhecimento é nos nossos dias indispensável a todo o engenheiro. Na parte «Exercícios» aumentou-se o número de problemas, insistindo sobre aqueles que, mais difíceis, exigem mais reflexão. O material desta nova edição é apresentado em dois volumes.

No primeiro volume, os capítulos iniciais «Número, variável, função» e «Limite e continuidade das funções» foram resumidos na medida do possível. Certas questões, habitualmente tratadas nestes capítulos, foram conscientemente reportadas aos capítulos seguintes. Isto permitiu abordar mais ràpidamente a derivada, noção fundamental do cálculo diferencial; esta necessidade foi-nos ditada pelas exigências das outras disciplinas do ensino técnico superior. O bom fundamento duma tal disposição foi felizmente confirmado pela experiência de vários anos.

No fim do primeiro volume inseriu-se os anexos I e II expondo problemas muito importantes para o engenheiro: «Estabelecimento duma dependência funcional a partir de dados experimentais pelo método dos mínimos quadrados» e «Fórmula de interpolação de Newton. Derivação numérica».

No segundo volume, para assegurar aos estudantes uma preparação matemática que lhes permita abordar as disciplinas ligadas à automação e aos métodos de cálculo automático, que são hoje ensinadas nos estabelecimentos de ensino técnico superior, vários desenvolvimentos, tratando em detalhe destas questões, foram inseridos: «Integração numérica das equações diferenciais e sistemas de equações diferenciais» (*), «Integração de sistemas diferenciais lineares», «Noção sobre a teoria da estabilidade de Liapounov», «Operador hamiltoniano», «Integral de Fourier», etc.

(*) Os métodos de cálculo numérico habitualmente tratados nos cursos de análise são igualmente expostos neste manual.

Esta edição foi também completada por dois novos capítulos «Equações da física matemática» (capítulo XVIII) e «Cálculo operacional e aplicações» (capítulo XIX).

O capítulo XVIII passa em revista as equações fundamentais da física matemática. Tem-se dado uma importância particular à análise da natureza dos fenómenos físicos que conduzem às equações de diferentes tipos e aos problemas de limites correspondentes. Uma grande importância foi igualmente concedida aos métodos numéricos de resolução das equações diferenciais às derivadas parciais.

No capítulo XIX expôs-se as noções fundamentais do cálculo operacional e o método operacional de resolução das equações diferenciais. Elas são indispensáveis para o estudo de numerosas disciplinas aplicadas, em especial as ligadas à electrotécnica.

Um grande número de problemas e de exercícios, que esclarecem a maior parte dos vínculos que existem entre as matemáticas e as outras disciplinas, foram incluídos neste manual. Os problemas e os exercícios foram especialmente escolhidos para cada capítulo do curso a fim de contribuir para a assimilação da parte teórica. Alguns foram resolvidos e comentados a título de exemplos. Isto torna o uso deste manual particularmente precioso para o estudo auto-didáctico.

Devo exprimir a minha profunda gratidão às Edições Mir que aceitaram a tradução e a publicação desta obra.

O autor

NOTA SOBRE A PRESENTE EDIÇÃO

Esta edição, a 4.ª em francês, reproduz a 3.ª, que se esgotou ràpidamente.

Procedemos, no entanto, às correcções que o autor julgara necessárias para esta nova edição, a fim de apresentar aos leitores uma obra ainda mais digna da sua confiança.

O EDITOR

Capítulo I

NÚMERO, VARIAVEL, FUNÇÕES

§ 1. Números reais. Representação dos números reais pelos pontos do eixo numérico

A noção de número é uma das mais fundamentais das matemáticas. Elaborada na Antiguidade, ela sofreu no decurso dos séculos um longo processo de extensão e de generalização.

Os números inteiros, os números fraccionários positivos e negativos, compreendendo o número zero, são chamados *números racionais.* Todo o número racional pode ser posto sob a forma de quociente $\frac{p}{q}$ de dois números inteiros p e q. Por exemplo:

$$\frac{5}{7}; \qquad 1{,}25=\frac{5}{4}.$$

Em particular, todo o número inteiro p pode ser considerado como quociente de dois números inteiros p e 1: $\frac{p}{1}$. Por exemplo:

$$6=\frac{6}{1}; \qquad 0=\frac{0}{1}.$$

Os números racionais podem ser postos sob a forma de fracções decimais limitadas ou ilimitadas.

Os números expressos pelas fracções decimais ilimitadas não periódicas, são denominados *números irracionais;* tais são, por exemplo, os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $5-\sqrt{2}$, etc.

O conjunto dos números racionais e irracionais formam o conjunto dos números *reais*. Os números reais constituem um conjunto ordenado, isto é, que para cada par de números reais x e y, uma e sòmente uma das relações seguintes

$$x<y, \quad x=y, \quad x>y$$

é satisfeita.

Os números reais podem ser representados pelos pontos do eixo numérico. Chama-se *eixo numérico* a uma recta infinita sobre a qual se escolheu: 1) um ponto O chamado origem, 2) um sentido positivo, que se indica por uma seta, e 3) uma unidade de medida. A maior parte das vezes, disporemos o eixo horizontalmente e escolheremos a direcção da esquerda para a direita como sentido positivo.

Se o número x_1 é positivo, representá-lo-emos pelo ponto M_1 situado à direita da origem e distante de O de $OM_1 = x_1$; da mesma forma se o número x_2 é negativo, nós representá-lo-emos pelo ponto M_2 situado à esquerda de O e distante de O de $OM_2 = x_2$ (fig. 1).

O ponto O representa o número zero. É evidente que todo o número real é representado por um só ponto do eixo numérico. A dois números reais distintos correspondem dois pontos diferentes (fig. 1) do eixo numérico. A afirmação seguinte é verdadeira: cada ponto do eixo numérico é a imagem dum só número real (racional ou irracional).

Assim existe uma correspondência biunívoca entre todos os números reais e todos os pontos do eixo numérico: a cada número

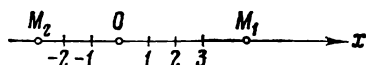



Fig. 1

corresponde um ponto único e inversamente a cada ponto corresponde um só número de que ele é imagem. Isso permite em numerosos raciocínios empregar indiferentemente a noção de «número x» ou a de «ponto x». Neste manual teremos frequentemente a ocasião de tirar partido desta observação.

Indiquemos, sem a demonstrar, a propriedade seguinte, relativa ao conjunto dos números reais: *entre dois números reais quaisquer, existem sempre números racionais e números irracionais*. Geomètricamente isto significa: *entre dois pontos quaisquer do eixo numérico, existem sempre pontos racionais e pontos irracionais.*

À guisa de conclusão, citamos o seguinte teorema que representa, de qualquer modo, o papel de um «ponto lançado entre a teoria e a prática».

Teorema — *Todo o número irracional α pode ser expresso com o grau de precisão desejado com o auxílio dos números racionais.*

Com efeito, seja α um número irracional positivo. Propunhamo-nos calcular o valor aproximado de α a menos de $\frac{1}{n}$ (por exemplo, a menos de $\frac{1}{10}$, a menos de $\frac{1}{100}$ etc.).

Qualquer que seja o número α, ele está incluso entre dois números inteiros consecutivos N e $N + 1$. Dividamos o segmento compreendido entre N e $N + 1$ em n partes iguais. Então α encontrar-se-á incluso entre dois números racionais $N + \frac{m}{n}$ e $N + \frac{m+1}{n}$. A diferença entre estes dois números, sendo igual a $\frac{1}{n}$, cada um deles exprimirá α com a precisão desejada, o primeiro por defeito, o segundo por excesso.

Exemplo — O número irracional $\sqrt{2}$ exprime-se com a ajuda dos números racionais:

$$1{,}4 \quad \text{e} \quad 1{,}5 \quad \text{a menos de} \quad \frac{1}{10}$$

$$1{,}41 \quad \text{e} \quad 1{,}42 \quad \text{a menos de} \quad \frac{1}{100}$$

$$1{,}414 \quad \text{e} \quad 1{,}415 \quad \text{a menos de} \quad \frac{1}{1\,000} \quad \text{etc.}$$

§ 2. Valor absoluto dum número real

Introduzamos agora a noção de valor absoluto de um número real.

Definição — Chama-se *valor absoluto* (*ou módulo*) de um número real x (notação $|x|$) ao número real não negativo, que satisfaz as seguintes condições:

$$|x| = x \quad \text{se} \quad x \geqslant 0;$$

$$|x| = -x \quad \text{se} \quad x < 0.$$

Exemplos: $|2| = 2$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$.

Resulta desta definição que para todo x se tem $x \leqslant |x|$.

Vejamos algumas propriedades do valor absoluto.

1. *O valor absoluto da soma algébrica de vários números reais não é superior à soma dos valores absolutos dos componentes.*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Demonstração — Seja $x + y \geqslant 0$, então

$$|x + y| = x + y \leqslant |x| + |y| \text{ (porque } x \leqslant |x| \text{ e } y \leqslant |y|).$$

Seja $x + y < 0$, então

$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leqslant |x| + |y|,$$

c. q. d.

A demonstração pode ser fàcilmente alargada a um número qualquer de termos.

Exemplos:

$$|-2+3| < |-2| + |3| = 2 + 3 = 5 \quad \text{ou} \quad 1 < 5,$$

$$|-3-5| = |-3| + |-5| = 3 + 5 = 8 \quad \text{ou} \quad 8 = 8.$$

2. *O valor absoluto da diferença não é inferior à diferença dos valores absolutos:*

$$|x - y| \leqslant |x| - |y|.$$

Demonstração — Façamos $x - y = z$, então $x = y + z$ e segundo a propriedade precedente,

$$|x| = |y + z| \leqslant |y| + |z| = |y| + |x - y|,$$

donde

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|,$$

c. q. d.

3. *O valor absoluto do produto é igual ao produto dos valores absolutos.*

$$|xyz| = |x|\,|y|\,|z|.$$

4. *O valor absoluto do quociente é igual ao quociente dos valores absolutos do dividendo e do divisor:*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

As duas últimas propriedades resultam imediatamente da definição do valor absoluto.

§ 3. Grandezas variáveis e grandezas constantes

Quando medimos certas grandezas físicas, tais como o tempo, o comprimento, a superfície, o volume, a massa, a velocidade, a pressão, a temperatura, etc., estabelecemos os valores numéricos destas grandezas físicas. As matemáticas estudam as grandezas sem ter em conta o seu conteúdo concreto. No que se segue, quando falarmos de grandeza, teremos em vista os seus valores numéricos. No decurso de diferentes fenómenos certas grandezas variam, quer dizer, que são susceptíveis de tomar diversos valores numéricos; pelo contrário, outras podem conservar um mesmo valor numérico. Assim, se um ponto material se desloca segundo um movimento uniforme, o tempo e a distância variam, enquanto que a velocidade permanece constante.

Chama-se *grandeza variável* ou *variável* uma grandeza susceptível de tomar diferentes valores numéricos. A uma grandeza cujos valores numéricos não mudam chama-se *grandeza constante* ou *constante*. No seguimento, designaremos as grandezas variáveis pelas letras x, y, z, u, ..., etc., e as grandezas constantes pelas letras a, b, c, ..., etc.

Nota — Em matemáticas considera-se muitas vezes as grandezas constantes como um caso particular das grandezas variáveis: uma constante é uma variável cujos diversos valores numéricos são todos iguais.

Notemos, todavia, que no decurso do estudo de diversos fenómenos físicos pode acontecer que uma mesma grandeza seja constante em certos casos e variável noutros. Por exemplo, a velocidade de um corpo animado dum movimento uniforme é uma grandeza constante, mas a velocidade de um movimento uniformemente acelerado é

uma grandeza variável. As grandezas que conservam um mesmo valor qualquer que seja o fenómeno considerado são chamadas *constantes absolutas*. Assim, a relação do comprimento duma circunferência com o seu diâmetro é uma constante absoluta cujo valor é $\pi \approx 3,14159$.

Veremos, no seguimento que a noção de grandeza variável é fundamental para o cálculo integral e diferencial. Em «A dialéctica da natureza» Engels escreve: «A grandeza variável de Descartes marcou uma reviravolta na matemática. É com ela que o movimento e a dialéctica entraram na matemática o que fez sentir imediatamente a necessidade do cálculo diferencial e integral».

§ 4. Domínio de definição duma variável

Uma variável é susceptível de tomar valores numéricos diferentes. O conjunto destes valores pode variar segundo o carácter do problema considerado. Por exemplo, a temperatura da água aquecida nas condições normais pode variar desde a temperatura ambiente, 15 a 18°C, até à do ponto de ebulição, 100°C. Pelo contrário, a variável $x = \cos \alpha$ pode tomar todos os valores compreendidos entre -1 e $+1$.

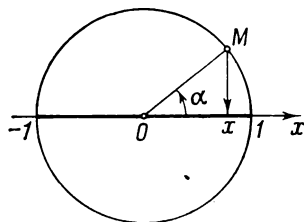



Fig. 2

O valor de um variável exprime-se geomètricamente por um ponto do eixo numérico. Assim, o conjunto os valores que toma a variável $x = \cos \alpha$ para todos os valores de α é representado pelo conjunto dos pontos do eixo numérico compreendido entre -1 e $+1$, estando inclusos os pontos -1 e $+1$ (fig. 2).

Definição — Chama-se *domínio de definição* de uma variável ao conjunto dos valores numéricos que ela é susceptível de tomar.

Citemos os domínios de definição de certas variáveis que encontraremos frequentemente, no decorrer da matéria.

Chama-se *intervalo aberto* ou *intervalo* de extremidades a e b, ao conjunto de todos os números x compreendidos entre a e b $(a < b)$; os números a e b não pertencem a este conjunto. Designa-se, quer pela notação (a, b), quer pelas desigualdades $a < x < b$.

Chama-se *segmento* ou *intervalo fechado* de extremidades a e b, ao conjunto de todos os números x compreendidos entre os dois números a e b; os números a e b pertencem ao conjunto. Designa-se, quer pela notação $[a, b]$, quer pelas desigualdades

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Se um dos números a ou b, a por exemplo, pertence e o outro não pertence a este intervalo, tem-se então um *semi-intervalo aberto* em b; pode-se defini-lo pelas desigualdades

$$a \leqslant x < b$$

e designa-se pela notação $[a, b)$. Se o número b pertence e o a não pertence a este intervalo, tem-se então um *semi-intervalo aberto* em a $(a, b]$ que se pode definir com o auxílio das desigualdades

$$a < x \leqslant b.$$

Se a variável x toma todos os valores maiores que a, designa-se este intervalo pela notação $(a, +\infty)$, que se pode igualmente definir

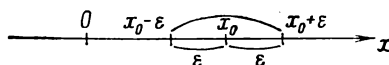



Fig. 3

com o auxílio das desigualdades convencionais

$$a < x < +\infty.$$

Considerar-se-á igualmente os intervalos e os semi-intervalos infinitos, definidos pelas seguintes desigualdades convencionais:

$$a \leqslant x < +\infty; \quad -\infty < x < c; \quad -\infty < x \leqslant c; \quad -\infty < x < +\infty$$

Exemplo — O domínio de definição da variável $x = \cos \alpha$, para todos os valores de α, é o segmento $[-1, 1]$; pode-se exprimi-lo com o auxílio das desigualdades $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Pode-se substituir nas definições precedentes a palavra «número» pela palavra «ponto». Assim, chama-se *segmento* ao conjunto de todos os pontos x situados entre os pontos a e b (a e b como sendo as *extremidades do segmento)*, os pontos a e b estão inclusos neste conjunto.

Chama-se *vizinhança* dum ponto x_0, a todo o intervalo aberto (a, b) contendo este ponto, isto é, um intervalo (a, b) para o qual sejam verificadas as desigualdades $a < x_0 < b$. Escolhe-se muitas vezes a vizinhança de modo que o ponto x_0 se encontre no meio. O ponto x_0 é então chamado o *centro de vizinhança* e o número $\frac{b-a}{2}$ o *raio de vizinhança.*

A figura 3 representa a vizinhança $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ de centro x_0 e de raio ε.

§ 5. Variável ordenada. Variável crescente e variável decrescente. Variável limitada

Diz-se que a variável x está *ordenada* se se conhece o seu domínio de definição e se, para cada par dos seus valores, se pode indicar o que é antecedente e o que é consequente. Aqui a noção de «*antecedência*» ou de «*consequência*» não está ligada ao tempo. Ela exprime uma certa maneira de ordenar os valores da variável.

Um caso particular de grandeza variável ordenada é a de uma grandeza variável cujos valores formam uma *sucessão numérica* x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... Neste caso, para $k' < k$ o valor $x_{k'}$ é «*antecedente*» e o valor x_k «*consequente*», independentemente do facto de qual destes dois valores é o maior.

Definição — 1. Uma variável diz-se *crescente* se cada valor consequente é maior que cada valor antecedente. Uma variável diz-se *decrescente* se cada valor consequente é menor que cada valor antecedente.

As variáveis crescentes e as variáveis decrescentes são chamadas *variáveis de variação monótona* ou simplesmente *variáveis monótonas*.

Exemplo — Quando se duplica o número de lados dum polígono regular inscrito num círculo, a área S deste polígono é uma variável crescente. Do mesmo modo, quando se duplica o número de lados dum polígono circunscrito a um círculo, a área deste polígono é uma variável decrescente. Notemos que uma variável não é necessàriamente crescente ou decrescente. Por exemplo, a variável $x = \text{sen}\ \alpha$ não é uma variável monótona quando α cresce sobre o segmento $[0, 2\pi]$. Ela cresce primeiro de 0 a 1, depois decresce de 1 a -1, cresce de novo de -1 a 0.

Definição — 2. Uma variável x diz-se *limitada* se existe uma constante $M > 0$ tal que para todos os valores consequentes da variável a partir dum certo valor, as desigualdades

$$-M \leqslant x \leqslant M, \qquad \text{isto é,} \qquad |x| \leqslant M,$$

são satisfeitas.

Por outras palavras, uma variável diz-se limitada se existe um segmento $[-M, M]$ tal que a partir de um certo valor todos os valores consequentes da variável pertencem a este segmento. Todavia, existem variáveis cujos valores não preenchem o segmento $[-M, M]$. Por exemplo, uma variável susceptível de tomar diferentes valores racionais do segmento $[-2,2]$ é limitada, mas, é evidente que ela não toma todos os valores deste segmento (precisamente, os valores irracionais).

§ 6. Função

O estudo dos diferentes fenómenos da natureza e a resolução dos diversos problemas técnicos e, por conseguinte, das matemáticas, levam-nos a considerar a variação de uma grandeza em correlação com a variação de uma outra grandeza. Assim quando estudamos um movimento, considerámos o caminho percorrido como uma variável que depende do tempo. Aqui o caminho percorrido é uma *função* do tempo.

Tomemos um outro exemplo. A área do círculo em função do raio é dada pela fórmula bem conhecida $Q = \pi R^2$. Se o raio R toma diferentes valores, a área Q tomará igualmente diferentes valores. Assim a variação de uma destas variáveis provoca a variação da outra. Aqui a área do círculo Q é uma função do raio R. Dêmos a definição da noção de «função».

Definição — 1. Diremos que y é uma função de x e escreveremos $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, etc., se a cada valor da variável x pertencendo a um certo domínio, corresponde um valor da variável y.

A variável x é chamada *variável independente*. A dependência entre as variáveis x e y chama-se *dependência funcional*. A letra f, que entra na notação simbólica da dependência funcional $y = f(x)$, indica que é necessário aplicar certas operações a x para obter o valor correspondente de y. Escreve-se por vezes $y = y(x)$, $u = u(x)$, em vez de $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$; neste caso, a letra y exprime ao mesmo tempo o valor da função e o símbolo das operações aplicadas a x.

A notação $y = C$, onde C é uma constante, exprime uma função cujo valor é igual a C qualquer que seja x.

Definição — 2. O conjunto dos valores x para os quais o valor da função y é dada pela lei $f(x)$ é chamado *domínio de existência* da função (ou *domínio de definição* da função).

Exemplo — 1. A função $y = \operatorname{sen} x$ é definida para todos os valores de x. Logo, o seu domínio de existência é o intervalo infinito $-\infty < x < \infty$.

Nota — 1. Se existe uma dependência funcional entre as duas variáveis x e $y = f(x)$ e se se considera x e $y = f(x)$ como variáveis ordenadas, diremos então que para os dois valores $y^* = f(x^*)$ e $y^{**} = f(x^{**})$ da função $f(x)$ correspondendo aos valores x^* e x^{**} da variável x, o valor consequente da função é o que corresponde ao valor consequente da variável independente. É por isto que somos naturalmente levados a enunciar a definição seguinte.

Definição — 3. A função $y = f(x)$ diz-se *crescente* se a um maior valor da variável independente corresponde um maior valor da função. Define-se duma maneira análoga a função *decrescente*.

Exemplo — 2. A função $Q = \pi R^2$ é uma função crescente para $0 < R < +\infty$; porque a um maior valor de R corresponde um maior valor de Q.

Nota — 2. Quando se define a noção de função, admite-se por vezes que a cada valor de x tomado num certo domínio corresponde não a um valor de y, mas vários ou mesmo uma infinidade. Neste caso, a função diz-se *multívoca*, ao passo que a função anteriormente definida diz-se *unívoca*. No seguimento convir-nos-á chamar funções ùnicamente às que são unívocas. Se em certos casos tivermos de recorrer a funções multívocas, especificá-lo-emos todas as vezes para evitar qualquer confusão.

§ 7. Diversas formas de expressão das funções

I. *Funções dadas com a ajuda de tábuas*

Neste processo dispõe-se numa certa ordem os valores da variável independente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e os valores correspondentes da função $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

x	x_1	x_2									x_n
y	y_1	y_2									y_n

Tais são, por exemplo, as tábuas das funções trignométricas, as tábuas de logarítmos, etc.

Pode-se obter no decurso do estudo experimental de certos fenómenos tábuas que exprimam a dependência funcional existente entre as grandezas medidas. Assim, por exemplo, as variações da temperatura do ar registados numa estação metereológica durante um dia dá-nos o quadro seguinte:

Valor da temperatura T *(em graus) em função do tempo* t *(em horas).*

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T	0	−1	−2	−2	−0,5	1	3	3,5	4

Este quadro define T em função de t.

II. *Representação gráfica das funções*

Consideremos no plano um sistema de coordenadas rectangulares. Um conjunto de pontos $M(x, y)$, tal que nenhum par de pontos se encontre sobre uma recta paralela ao eixo Oy, define uma certa função unívoca $y = f(x)$. Os valores da variável independente são as abcissas destes pontos, os valores da função as ordenadas correspondentes, (fig. 4).

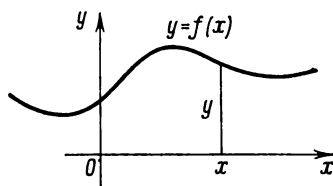



Fig. 4

O conjunto dos pontos do plano (xOy) cujas abcissas são os valores da variável independente e as ordenadas os valores correspondentes da função chama-se *gráfico desta função.*

III. *Representação analítica das funções*

Precisemos em primeiro lugar o que entendemos por «expressão analítica». Chamaremos *expressão analítica* à notação simbólica do conjunto das operações matemáticas conhecidas que se deve aplicar numa certa ordem aos números e às letras que exprimem grandezas constantes ou variáveis.

Notemos que por conjunto das operações matemáticas conhecidas nos referimos não sòmente às operações matemáticas aprendidas no decurso dos estudos secundários (adição, subtracção, raíz quadrada, etc.) mas igualmente todas as operações que serão definidas à medida que sejam expostas no curso.

Consideremos exemplos de expressões analíticas:

$$x^4 - 2; \quad \frac{\log x - \operatorname{sen} x}{5x^2 + 1}; \quad 2^x - \sqrt{5 + 3x}, \quad \text{etc.}$$

Se a dependência funcional $y = f(x)$ é tal que f é uma expressão analítica, dizemos que a função y de x é dada analìticamente. Eis

alguns exemplos de expressões analíticas:

$$1)\ y = x^4 - 2;\quad 2)\ y = \frac{x+1}{x-1};\quad 3)\ y = \sqrt{1 - x^2};$$

$$4)\ y = \operatorname{sen} x;\quad 5)\ Q = \pi R^2,\quad \text{etc.}$$

Nestes exemplos as funções estão expressas analìticamente por uma única fórmula. (Chama-se fórmula à igualdade entre duas expressões analíticas). Nestes casos pode-se falar do domínio *natural* de definição da uma função.

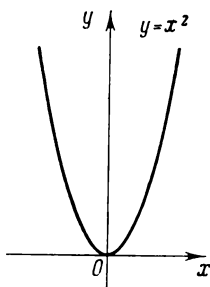



Fig. 5

O domínio natural de definição de uma função dada por uma expressão analítica é o conjunto dos valores de x para os quais a expressão do segundo membro tem um valor bem determinado. Assim o domínio natural de definição da função $y = x^4 - 2$ é o intervalo infinito $-\infty < x < \infty$, pois que esta função é definida para todos os valores de x. A função $y = \frac{x+1}{x-1}$ é definida para todos os valores de x excepto para o valor $x = 1$, porque para este valor o denominador se anula. O domínio natural de definição da função $y = \sqrt{1 - x^2}$ é o segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$, etc.

Nota — Importa por vezes considerar não todo o domínio natural de definição de uma função, mas uma parte deste domínio. Assim, a superfície Q do círculo exprime-se em função do raio R pela função $Q = \pi R^2$. O domínio de definição desta função para este problema geométrico concreto é evidentemente o intervalo infinito $0 < R < +\infty$. Contudo, o domínio natural de definição desta função é o intervalo infinito $-\infty < R < +\infty$.

Uma função $y = f(x)$ de que se conhece a expressão analítica pode ser representada gràficamente no plano das coordenadas xOy. Assim, o gráfico da função $y = x^2$ é a parábola representada na figura 5.

§ 8. Principais funções elementares. Funções elementares

As *principais funções elementares* são funções cuja expressão analítica é uma das seguintes:

I. A *função potência:* $y = x^\alpha$ em que α é um número real (*).

(*) Para α irracional, esta função calcula-se tomando o logaritmo e a exponencial: $\log y = \alpha \log x$. Supõe-se que $x > 0$.

II. A *função exponencial:* $y = a^x$ em que a é um número positivo diferente de 1.

III. A *função logarítmica:* $y = \log_a x$ em que a base do logarítmo é um número positivo a diferente da unidade.

IV. As *funções trigonométricas:*

$$y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x, \quad y = \sec x,$$
$$y = \operatorname{cosec} x.$$

V. As *funções trigonométricas inversas:*

$$y = \operatorname{arc\ sen} x, \quad y = \operatorname{arc\ cos} x, \quad y = \operatorname{arc\ tg} x,$$
$$y = \operatorname{arc\ ctg} x, \quad y = \operatorname{arc\ sec} x, \quad y = \operatorname{arc\ cosec} x.$$

Determinemos os domínios de definição e tracemos os gráficos das principais funções elementares:

A *função potência,* $y = x^\alpha$.

1. α é um inteiro positivo. A função é definida em cada ponto do intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$. Os gráficos desta função para diferentes valores de α estão representados sobre as figuras 6 e 7.

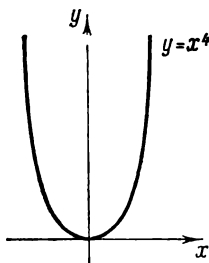
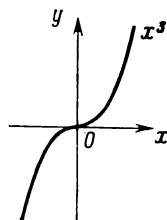



Fig. 6 Fig. 7

2. α é um inteiro negativo. Neste caso a função é definida para todos os valores de x excepto o valor $x = 0$. Os gráficos desta função para diferentes valores de α estão representados sobre as figuras 8 e 9.

As figuras 10, 11, 12 representam os gráficos das funções potência para α racionais fraccionários.

A *função exponencial,* $y = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Esta função é definida para todos os valores de x. O gráfico desta função está representado sobre a figura 13.

A *função logarítmica*, $y = \log_a x$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Esta função é definida para $x > 0$. O gráfico desta função está representado sobre a figura 14.

As *funções trigonométricas*. Nas fórmulas $y = \text{sen } x$, etc., a variável independente x está expressa em radianos. Antes de dar a definição

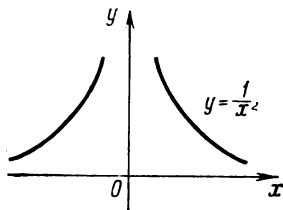
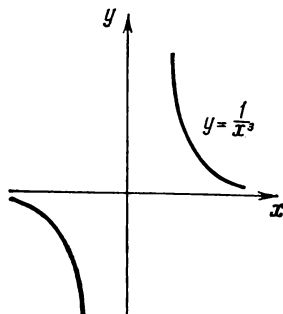



Fig. 8 Fig. 9

de função periódica notemos que todas as funções circulares enumeradas são periódicas.

Definição — 1. A função $y = f(x)$ diz-se periódica se existe um número constante C tal que o valor da função não se altere quando se junta (ou se subtrai) o número C à variável independente: $f(x) = f(x + C)$.

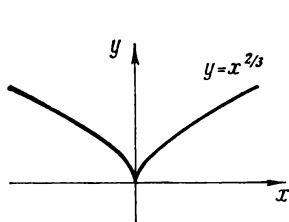
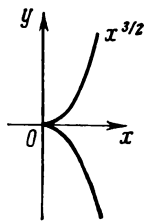
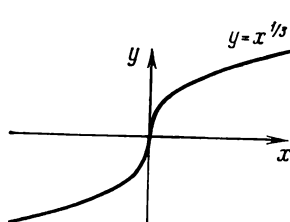



Fig. 10 Fig. 11 Fig. 12

O menor destes números chama-se *período* da função. Designá-lo-emos no seguimento por $2l$.

Resulta imediatamente desta definição que a função $y = \text{sen } x$ é uma função periódica de período 2π : $\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi)$. O período da função $y = \cos x$ é também igual a 2π. O período das funções $y = \text{tg } x$ e $y = \text{cotg } x$ é igual a π.

As funções $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$ são definidas para todos os

valores de x; as funções $y = \text{tg } x$ e $y = \sec x$ são definidas para todos os valores, excepto nos pontos $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; as funções $y = \text{cotg } x$ e $y = \text{cosec } x$ são definidas para todos os valores de x excepto nos pontos $x = k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Os gráficos das funções trigonométricas estão representados sobre as figuras 15 a 19.

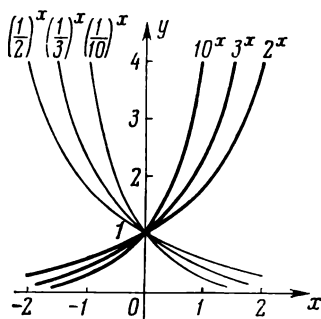
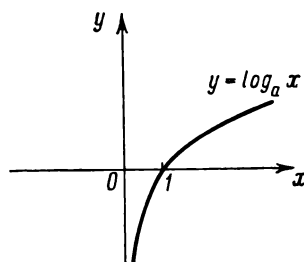



Fig. 13 Fig. 14

No decorrer das lições estudaremos em pormenor os gráficos das funções trigonométricas inversas.

Introduzamos a noção de função de função. Se y é uma função de u, e u uma função da variável x, y depende então de x. Seja

$$y = F(u)$$

e

$$u = \varphi(x)$$

Deduzimos uma função y de $x : y = F[\varphi(x)]$.

Esta última chama-se *função de função* ou *função composta*.

Exemplo — 1. Seja $y = \text{sen } u$ e $u = x^2$. A função $y = \text{sen}(x^2)$ é uma função composta de x.

Nota — O domínio de definição da função $y = F[\varphi(x)]$ é ou o domínio de definição completo da função $u = \varphi(x)$, ou a parte deste domínio no qual os valores de u pertencem ao domínio de definição da função $F(u)$.

Exemplo — 2. O domínio de definição da função $y = \sqrt{1 - x^2}$ $(y = \sqrt{u}$, $u = 1 - x^2)$ é o segmento $[-1, 1]$, visto que quando $|x| > 1$, $u < 0$, e por conseguinte, a função $\sqrt{u}$ não é definida (embora a função $u = 1 - x^2$ seja definida para todos os valores de x). O gráfico desta função é a metade superior da circunferência de raio 1, cujo centro é a origem das coordenadas.

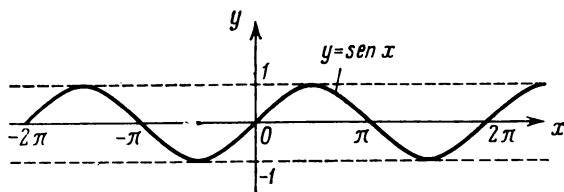



Fig. 15

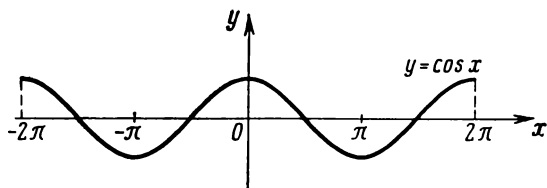



Fig. 16

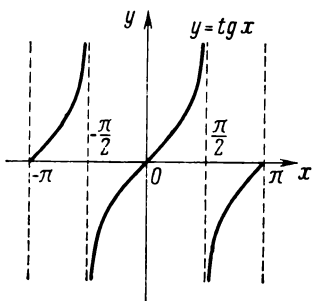



Fig. 17

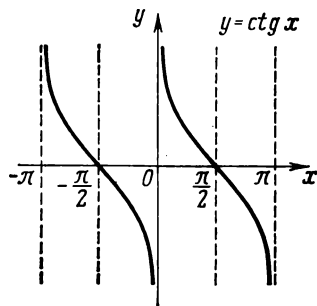



Fig. 18

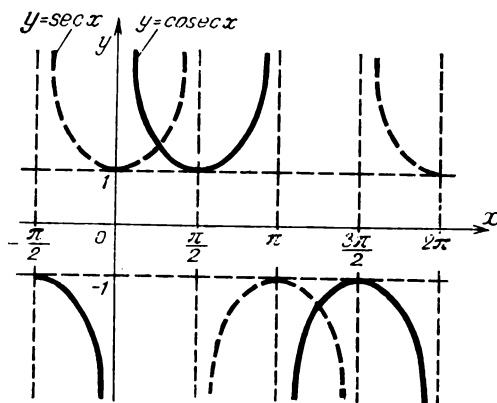



Fig. 19

A operação «função de função» pode ser executada não sòmente uma vez, mas um número arbitrário de vezes. Por exemplo, obtém-se a função composta $y = \text{Log}\ [\text{sen}\ (x^2 + 1)]$ executando as operações seguintes (em definindo as funções seguintes):

$$v = x^2 + 1, \quad u = \text{sen}\ v, \quad y = \text{Log}\, u.$$

Dêmos a definição duma função elementar.

Definição — 2. Chama-se *função elementar* toda a função que pode ser dada com a ajuda de uma só fórmula do tipo $y = f(x)$, onde a função $f(x)$ é o resultado das combinações de funções elementares principais e de constantes realizadas com a ajuda das operações de adição,

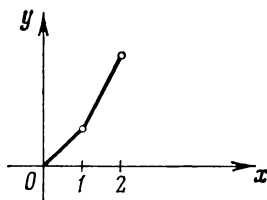



Fig. 20

de subtracção, de multiplicação, de divisão e de função de função; todas as operações devem ser efectuadas um número finito de vezes. Resulta desta definição que as funções elementares fazem parte das funções definidas analìticamente.

Exemplos de funções elementares:

$$y = \sqrt{1 + 4\,\text{sen}^2\, x}\,; \qquad y = \frac{\log x + 4\sqrt[3]{x} + 2\ \text{tg}\, x}{10^x - x + 10},$$

etc.

Exemplo de função não elementar:

A função $y = 1.2.3. \ldots \cdot n$ $(y = f(n))$ não é uma função elementar visto que o número de operações que se deve efectuar para obter y cresce com n, isto é, não é um número finito.

Nota — A função representada sobre a figura 20 é uma função elementar se bem que ela seja dada com a ajuda de duas fórmulas:

$$f(x) = x, \quad \text{se} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad f(x) = 2x - 1, \quad \text{se} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Pode-se mostrar que esta função pode ser dada com a ajuda de uma única fórmula $y = f(x)$, como indicada na definição 2. Com efeito, pode-se escrever:

$$f(x) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{(x-1)^2}$$

para $0 \leqslant x \leqslant 2$.

§ 9. Funções algébricas

As funções algébricas compreendem as funções elementares seguintes:

I. *Função racional inteira* ou *polinómio*

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

em que a_0, a_1, ..., a_n são números constantes chamados coeficientes; n é um inteiro positivo que se chama grau do polinómio. É evidente que esta função é definida para todos os valores de x, isto é, que ela é definida num intervalo infinito.

Exemplos — 1. $y = ax + b$ é uma *função linear.* Quando $b = 0$, esta função exprime uma dependência entre x e y tal que estas duas variáveis são proporcionais. Quando $a = 0$, $y = b$ a função é constante.

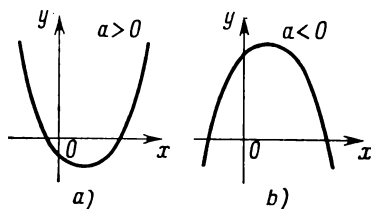



Fig. 21

2. $y = ax^2 + bx + c$ é uma *função do segundo grau.* O gráfico desta função é uma parábola (fig. 21). O estudo pormenorizado destas funções é o objecto da geometria analítica.

II. *Fracções racionais.* Esta função é definida como o quociente de dois polimónios:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

Um exemplo de fracção racional é-nos fornecido pela função

$$y = \frac{a}{x}$$

que exprime uma dependência inversamente proporcional.

O gráfico desta função é dado sobre a figura 22. É evidente que a fracção racional é definida para todos os valores de x excepto, os valores para os quais o denominador se anula.

III. *Função irracional.* Diz-se que a função $y = f(x)$ é *irracional*, se $f(x)$ é o resultado das operações de adição, de subtracção, de multi-

plicação, de divisão e de elevação a uma potência racional não inteira. Eis exemplos de funções irracionais:

$$y = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + 5x^2}}; \quad y = \sqrt{x}, \quad \text{etc.}$$

Nota — 1. Os três tipos de funções algébricas que acabamos de citar não esgotam todas as funções algébricas. Chama-se *função algébrica* toda a função $y = f(x)$ que satisfaz uma equação do tipo

$$P_0(x) y^n + P_1(x) y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0, \tag{1}$$

onde $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ são polinómios de x.

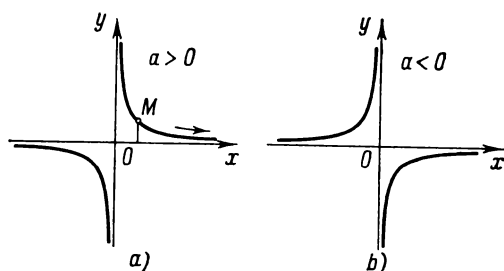



Fig. 22

Pode-se demonstrar que toda a função pertencente a um dos três tipos citados verifica uma equação do tipo (1), mas entre as funções que verificam as equações do tipo (1), existem funções que não pertencem a nenhum dos três tipos precedentes.

Nota — 2. Chama-se *funções transcendentes* as funções que não são funções algébricas.

Eis exemplos de funções transcendentes:

$$y = \cos x, \quad y = 10^x, \quad \text{etc.}$$

§ 10. Sistema de coordenadas polares

Pode-se determinar a posição dum ponto do plano com a ajuda de um *sistema* chamado de *coordenadas polares*.

Seja no plano um ponto O que se chama *pólo* e uma semi-recta saída deste ponto que se chama *eixo polar*. A posição dum ponto arbitrário M do plano pode ser determinada com a ajuda de dois números: o número ρ que dá a distância do ponto M ao pólo, e o número φ que é igual ao ângulo formado pelo segmento OM e o eixo polar.

Adopta-se o sentido contrário aos ponteiros dum relógio como sentido positivo.

Os números ρ e φ chamam-se *coordenadas polares* do ponto M (fig. 23).

O raio vector ρ será sempre um número *não negativo*. Se o ângulo polar φ varia entre os limites $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, então a cada ponto do plano, que não seja o pólo, corresponde um par bem determinado de números ρ e φ. Para o pólo $\rho = 0$ e φ é arbitrário.

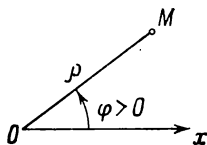
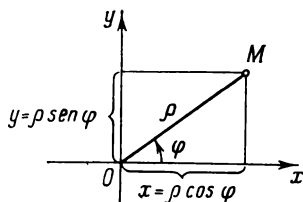



Fig. 23 Fig. 24

Estabeleçamos as relações que existem entre as coordenadas polares e as coordenadas ortogonais. Suponhamos que a origem do sistema de coordenadas ortogonais coincide com o pólo e o sentido positivo do eixo Ox com o eixo polar.

Resulta directamente da figura 24 que

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi$$

e inversamente

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Nota — Para determinar φ, é necessário tomar em consideração o quadrante onde se encontra o ponto e escolher o valor apropriado de φ. No sistema de coordenadas polares a equação $\rho = F(\varphi)$ determina uma curva.

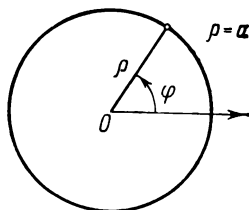



Fig. 25

Exemplo — 1. A equação $\rho = a$, em que a é uma constante, define no sistema de coordenadas polares um círculo, cujo centro está no pólo e o raio é a. A equação deste círculo (fig. 25) num sistema de coordenadas ortogonais, disposta como indica a figura 24, é:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Exemplo — 2.

$$\rho = a\varphi, \text{ onde } a = \text{const.}$$

Dispunhamos sob a forma de quadro os valores de ρ para certos valores de φ:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π	4π
ρ	0	$\approx 0,78\,a$	$\approx 1,57\,a$	$\approx 2,36\,a$	$\approx 3,14\,a$	$\approx 4,71\,a$	$\approx 6,28\,a$	$\approx 9,42\,a$	$\approx 12,56\,a$

A curva correspondente está representada sobre a figura 26. Esta curva chama-se *Espiral de Arquimedes.*

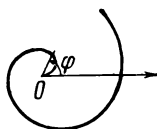



Fig. 26

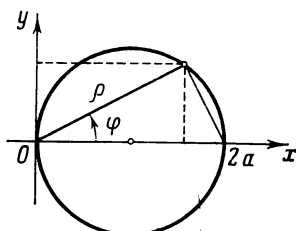



Fig. 27

Exemplo — 3.

$$\rho = 2a \cos \varphi.$$

É a equação dum círculo de raio a, cujo centro se encontra no ponto $\rho_0 = a$, $\varphi = 0$ (fig. 27). Escrevamos a equação deste círculo no sistema de cordenadas rectangulares.

Substituindo nesta equação $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

tem-se
$$\sqrt{x^2+y^2} = 2a\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
ou
$$x^2+y^2-2ax=0.$$

Exercícios

1. Seja dada a função $f(x) = x^2 + 6x - 4$. Verificar as igualdades $f(1) = 3$, $f(3) = 23$.
2. $f(x) = x^2 + 1$. Calcular os valores: a) $f(4)$. Resposta 17.
   b) $f(\sqrt{2})$. **Resp.** 3. c) $f(a+1)$. **Resp.** a^2+2a+2. d) $f(a)+1$. **Resp.** a^2+2. e) $f(a^2)$. **Resp.** a^4+1. f) $[f(a)]^2$. **Resp.** a^4+2a^2+1. g) $f(2a)$. **Resp.** $4a^2+1$.
3. $\varphi(x) = \dfrac{x-1}{3x+5}$. **Formar as espressões:** $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$ e $\dfrac{1}{\varphi(x)}$. **Resp.** $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1-x}{3+5x}$; $\dfrac{1}{\varphi(x)} = \dfrac{3x+5}{x-1}$.
4. $\psi(x) = \sqrt{x^2+4}$. **Formar as espressões::** $\psi(2x)$ e $\psi(0)$. **Resp.** $\psi(2x) = 2\sqrt{x^2+1}$; $\psi(0) = 2$.

5. $f(\theta)=\operatorname{tg}\theta$. Verificar a igualdade de $f(2\theta)=\dfrac{2f(\theta)}{1-[f(\theta)]^2}$.

6. $\varphi(x)=\log\dfrac{1-x}{1+x}$. Verificar a igualdade de $\varphi(a)+\varphi(b)=\varphi\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

7. $f(x)=\log x$; $\varphi(x)=x^3$.]Formar as espressões : : a) $f[\varphi(2)]$. Resp. $3\log 2$. b) $f[\varphi(a)]$. Resp. $3\log a$. c) $\varphi[f(a)]$. Resp. $[\log a]^3$.

8. Indicar o domínio natural de definição da função $y=2x^2+1$. Resp. $-\infty<x<+\infty$.

9. Indicar os domínios naturais de definição das funções:

a) $\sqrt{1-x^2}$. Resp. $-1\leqslant x\leqslant+1$. b) $\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$. Resp. $-3\leqslant x\leqslant 7$.

c) $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[5]{x-b}$. Resp $-\infty<x<+\infty$. d) $\dfrac{a+x}{a-x}$. Resp. $x\neq a$.

e) $\operatorname{arc\,sen}^2 x$. Resp. $-1\leqslant x\leqslant 1$. f) $y=\log x$. Resp. $x>0$.

g) $y=a^x$ $(a>0)$. Resp. $-\infty<x<+\infty$.

Construir o gráfico das funções seguintes:

10. $y=-3x+5$. 11. $y=\dfrac{1}{2}x^2+1$. 12. $y=3-2x^2$.

13. $y=x^2+2x-1$. 14. $y=\dfrac{1}{x-1}$. 15. $y=\operatorname{sen}2x$.

16. $y=\cos 3x$. 17. $y=x^2-4x+6$. 18. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

19. $y=\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. 20. $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. 21. $y=\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\right)x$.

22. $y=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{4}x$. 23. $y=3^x$. 24. $y=2^{-x^2}$.

25. $y=\log_2\dfrac{1}{x}$. 26. $y=x^3+1$. 27. $y=4-x^3$.

28. $y=\dfrac{1}{x^2}$. 29. $y=x^4$. 30. $y=x^5$. 31. $y=x^{\frac{1}{2}}$.

32. $y=x^{-\frac{1}{2}}$. 33. $y=x^{\frac{1}{3}}$. 34. $y=|x|$.

35. $y=\log_2|x|$. 36. $y=\log_2(1-x)$.

37. $y=3\operatorname{sen}\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$. 38. $y=4\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

39. A função $f(x)$ é definida sobre o segmento $[-1;\ 1]$ da seguinte maneira:

$$f(x)=1+x \quad \text{para} \quad -1\leqslant x\leqslant 0;$$
$$f(x)=1-2x \quad \text{para} \quad 0\leqslant x<1.$$

40. A função $f(x)$ é definida sobre o segmento $[0;\ 2]$ da seguinte maneira:

$$f(x)=x^3 \quad \text{para} \quad 0\leqslant x\leqslant 1;$$
$$f(x)=x \quad \text{para} \quad 1\leqslant x\leqslant 2.$$

Construir as curvas dadas, em coordenadas polares.

41. $\rho=\dfrac{a}{\varphi}$ (espiral hiperbólica).

42. $\rho=a^{\varphi}$ (espiral logarítmica).

43. $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (lemniscata). 44. $\rho=a(1-\cos\varphi)$ (cardioïde).

45. $\rho=a\operatorname{sen}3\varphi$.

Capítulo II

LIMITE E CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES

§ 1. Limite duma grandeza variável. Grandeza variável infinitamente grande

Vamos considerar neste parágrafo variáveis ordenadas de variação específica que se define pela expressão «*a variável tende para um limite*». No decorrer deste curso, a noção de limite duma variável vai representar um papel fundamental, estando intimamente ligada às noções de base da análise matemática: a derivada, o integral, etc.

Definição — 1. O número constante a chama-se o *limite* da grandeza variável x, se, para todo o número arbitràriamente pequeno

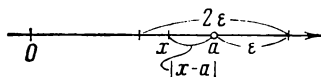



Fig. 28

$\varepsilon > 0$, se pode indicar um valor da variável x tal que todos os valores consequentes da variável verifiquem a desigualdade

$$|x - a| < \varepsilon.$$

Se o número a é o limite da variável x, diz-se que x tende para o limite a e escreve-se:

$$x \to a \quad \text{ou} \quad \lim x = a. \quad (*).$$

Pode-se definir igualmente a noção de limite partindo de considerações geométricas.

O número constante a é o *limite* da variável x, se para toda a vizinhança dada, por mais pequena que seja, de centro a e de raio ε, se pode encontrar um valor de x tal que todos os pontos correspondentes aos valores seguintes da variável pertençam a esta vizinhança (fig. 28). Citemos alguns exemplos:

(*) «lim» abreviatura do latim *limes* que significa limite.

Exemplo — 1. A variável x toma sucessivamente os valores $x_1 = 1 + 1$; $x_2 = 1 + \frac{1}{2}$; $x_3 = 1 + \frac{1}{3}$; ...; $x_n = 1 + \frac{1}{n}$; ...

Mostremos que esta grandeza variável tem um limite igual à unidade. Temos

$$|x_n - 1| = \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right| = \frac{1}{n}.$$

Para ε arbitrário, todos os valores consequentes da variável a partir de n definido pela relação $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ou $n > \frac{1}{\varepsilon}$, verificam a desigualdade

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ c.q.d.}$$

Notemos que no caso presente a variável tende para o seu valor limite decrescendo.

Exemplo — 2. A variável x toma sucessivamente os valores

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}; \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2^2}; \quad x_3 = 1 - \frac{1}{2^3};$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{2^4}; \ \ldots; \ x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{2^n}; \ \ldots$$

Esta variável tem um limite igual à unidade. Com efeito,

$$|x_n - 1| = \left| \left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^n}\right) - 1 \right| = \frac{1}{2^n}.$$

Para ε arbitrário a partir de n satisfazendo a relação

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

donde

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$n \log 2 > \log \frac{1}{\varepsilon}$$

ou

$$n > \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2},$$

todos os valores seguintes de x verificam a desigualdade $|x_n - 1| < \varepsilon$.

Notemos que neste caso o valor da variável é tanto maior, quanto menor for o do valor limite. A variável tende para o seu limite «oscilando à volta dele».

Nota — 1. Como foi indicado no § 3 do Capítulo I, a grandeza constante c pode ser considerada como uma variável onde todos os valores são iguais: $x = c$.

É evidente que o limite duma grandeza constante é igual a essa constante, visto que a desigualdade $|x - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ é sempre satisfeita para ε arbitrário.

Nota — 2. Resulta da definição de limite que uma grandeza variável não pode ter dois limites. Com efeito, se $\lim x = a$ e $\lim x = b$ $(a < b)$, x deve satisfazer simultâneamente às duas desigualdades seguintes:

$$|x - a| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |x - b| < \varepsilon$$

para ε arbitràriamente pequeno; mas isto é impossível se $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ (fig. 29).

Nota — 3. Não é necessário imaginar-se que cada variável deve necessàriamente ter um limite. Seja x uma variável que toma sucessivamente os valores

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = 1 - \frac{1}{4}; \quad x_3 = \frac{1}{8}; \quad \ldots; \quad x_{2k} = 1 - \frac{1}{2^{2k}};$$

$$x_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}}$$

(fig. 30). Para k suficientemente grande, o valor de x_{2k} e todos os valores consequentes correspondentes aos índices pares serão tão vizi-

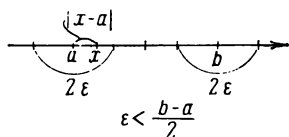
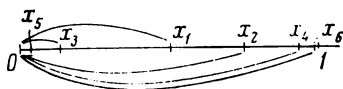



Fig. 29 Fig. 30

nhos da unidade quanto se queira, mas o valor x_{2k+1} e todos os valores que seguem correspondendo aos índices ímpares serão tão vizinhos de zero quanto se queira. Portanto, a variável x não tende para um limite.

Sobressai da definição de limite que se uma variável tende para um limite a, a é uma grandeza constante. Mas a expressão «tende para» pode-se empregar igualmente para caracterizar um outro modo de variação de uma variável, o que transparece na definição seguinte.

Definição — 2. A variável x tende para o infinito, se para cada número positivo dado M se pode indicar um valor de x a partir do qual todos os valores consequentes da variável verificam a desigualdade $|x| > M$.

Se a variável x tende para o infinito, diz-se que é uma variável *infinitamente grande* e escreve-se $x \to \infty$.

Exemplo — 3. **A variável x toma os valores**

$$x_1 = -1\ ;\quad x_2 = 2\ ;\quad x_3 = -3\ ;\ \ldots\ ;\ x_n = (-1)^n n\ ;\ \ldots$$

É uma variável infinitamente grande visto que para $M > 0$ arbitrário todos os valores da variável a partir de um de entre eles são todos maiores que M em valor absoluto.

A variável x «tende para mais infinito» ou $x \to +\infty$ se para $M > 0$ arbitrário, a partir de um certo valor, todos os valores consequentes da variável verificam a desigualdade $M < x$.

Um exemplo de variável tendendo para mais infinito é dada pela variável x que toma os valores $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots,\ x_n = n,\ \ldots$

A variável x «tende para menos infinito» ou $x \to -\infty$ se para $M > 0$ arbitrário, a partir de um certo valor, todos os valores seguintes da variável verificam a desigualdade $x < -M$.

Assim, por exemplo, a variável que toma os valores $x_1 = -1,\ x_2 = -2,\ \ldots$ ‘. . . ‘u — == u_x ‘. . . tende para menos infinito.

§ 2. Limite de uma função

Neste parágrafo estudaremos certos casos particulares de variação de uma função quando a variável independente x tende para um limite a ou para infinito.

Definição — 1. Seja $y = f(x)$ uma função definida numa vizinhança do ponto a ou em certos pontos desta vizinhança. A *função $y = f(x)$ tende para o limite b ($y \to b$) quando x tende para a ($x \to a$)*, se para cada número positivo ε, por mais pequeno que seja, se pode indicar um número positivo δ tal que para todos os x diferentes de a e verificando a desigualdade (*)

$$|x - a| < \delta$$

a desigualdade

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

é satisfeita. Se b é o *limite da função* $f(x)$ quando $x \to a$, escreve-se então

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

ou $f(x) \to b$ quando $x \to a$.

(*) No caso presente, temos em vista os valores de x que verificam a desigualdade $|x - a| < \delta$ e pertencendo ao domínio de definição da função. No seguimento encontraremos frequentemente casos análogos. Assim, quando estudarmos o comportamento duma função para $x \to \infty$, pode acontecer que a função seja definida para os valores inteiros e positivos de x. Por conseguinte, neste caso $x \to \infty$, tomando valores positivos inteiros. No seguimento suporemos que esta condição é sempre realizada.

O facto de $f(x) \to b$ quando $x \to a$ traduz-se no gráfico da função $y = f(x)$ da seguinte maneira (fig. 31); visto que da desigualdade $|x - a| < \delta$ resulta a desigualdade $|f(x) - b| < \varepsilon$, então os pontos M do gráfico da função $y = f(x)$, correspondentes a todos os pontos x cuja distância até ao ponto a é interior a δ, estão contidos numa faixa de largura 2ε delimitada pelas rectas $y = b - \varepsilon$ e $y = b + \varepsilon$.

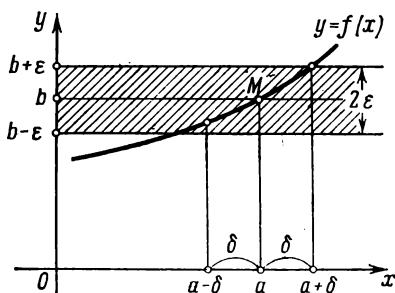



Fig. 31

Nota — 1. Pode-se igualmente definir o limite da função $f(x)$, quando $x \to a$, da seguinte maneira.

Seja uma variável x tomando valores tais que (ordenados de tal maneira que) se

$$|x^{*} - a| > |x^{**} - a|,$$

então x^{**} é um valor consequente e x^{*} um valor antecedente. Se

$$|\bar{x}^{*} - a| \quad |\bar{x}^{**} - a| \quad \text{e} \quad \bar{x}^{*} < \bar{x}^{**},$$

então $\bar{x}^{**}$ é consequente e $\bar{x}^{*}$ antecedente.

Doutro modo, de dois pontos da recta numérica o ponto consequente é aquele que está mais perto de a. Se os pontos estão a igual distância de a, o ponto consequente será aquele que se encontra à direita de a.

Seja uma variável x ordenada desta maneira e tendendo para o limite a $[x \to a$ ou $\lim x = a]$.

Consideremos a variável $y = f(x)$. Além disso, admitamos duma vez para sempre que de dois valores da função o valor consequente é o que corresponde ao valor consequente da variável x.

Se uma grandeza variável y, definida como foi acima indicado, tende para um limite b, quando $x \to a$, escreveremos então

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

e diremos que a função $y = f(x)$ tende para o limite b para $x \to a$.

Demonstra-se fàcilmente que estas duas definições de limite são equivalentes.

Nota — 2. Se $f(x)$ tende para o limite b_1 quando x tende para um número a tomando apenas valores menores que a, escreveremos então $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$ e chamaremos b_1 o limite à esquerda da função $f(x)$ no ponto a. Se x toma valores maiores que a escreveremos

então $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_2$ e chamamos b_2 o limite à direita da função no ponto a (fig. 32).

Pode-se demonstrar que se os limites à esquerda e à direita existirem e forem iguais, isto é, $b_1 = b_2 = b$, então b é o limite desta função no ponto a no sentido definido acima. Inversamente, se uma função tem um limite b no ponto a, os limites desta função no ponto a à esquerda e à direita existem e são iguais.

Fig. 32

Exemplo — 1. Mostremos que $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 1) = 7$.

Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ um número arbitrário dado; para que a desigualdade

$$|(3x+1)-7| < \varepsilon$$

seja satisfeita, é necessário que sejam satisfeitas as seguintes desigualdades:

$$|3x-6| < \varepsilon, \quad |x-2| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$-\frac{\varepsilon}{3} < x-2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim para ε arbitrário e para todos os valores da variável x verificando a desigualdade $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$ o valor da função $3x + 1$ difere de 7 pelo menos de ε. Isto significa justamente que 7 é o limite desta função para $x \to 2$.

Nota — 3. Para a existência do limite de uma função quando $x \to a$, não é necessário que a função seja definida no ponto $x = a$. Quando calculamos um limite, devemos considerar os valores da função na vizinhança do ponto a, mas diferentes de a. Isto é claramente ilustrado pelo exemplo seguinte.

Exemplo — 2. Mostremos que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$. Aqui a função $\frac{x^2-4}{x-2}$ não é definida para $x = 2$.

Devemos demonstrar que para ε arbitrário se pode indicar um δ tal que seja satisfeita a desigualdade

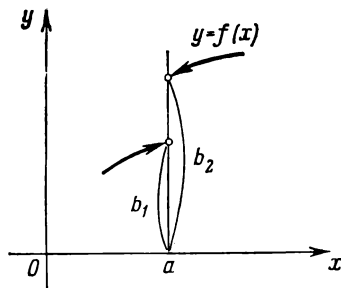
$$\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon \tag{1}$$

desde que $|x - 2| < \delta$. Mas para $x \neq 2$, a desigualdade (1) é equivalente à desigualdade

$$\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4\right| = |(x+2)-4| < \varepsilon \tag{1}$$

ou

$$|x-2| < \varepsilon. \tag{2}$$

Assim, a desigualdade (1) será satisfeita qualquer que seja ε se a desigualdade (2) é satisfeita (aqui $\delta = \varepsilon$). Isso significa que o limite desta função é igual a 4 quando x tende para 2.

Consideremos ainda certos casos de variação duma função quando x tende para o infinito.

Definição — 2. *A função $f(x)$ tende para o limite b quando* $x \to \infty$ se para cada número positivo ε por mais pequeno que seja se pode indicar um número positivo N tal que para todos os valores de x verificando a desigualdade $|x| > N$ a desigualdade $|f(x) - b| < \varepsilon$ é satisfeita.

Exemplo — 3. Mostremos que

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) = 1$$

ou que $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$.

É necessário demonstrar que, qualquer que seja ε, a desigualdade

$$\left| \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 1 \right| < \varepsilon \tag{3}$$

será satisfeita desde que $|x| > N$, onde N é definido pela escolha de ε. A desigualdade (3), é equivalente à desigualdade seguinte: $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$, que é satisfeita se se tiver

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon} = N.$$

Isso significa que $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x} = 1$ (fig. 33).

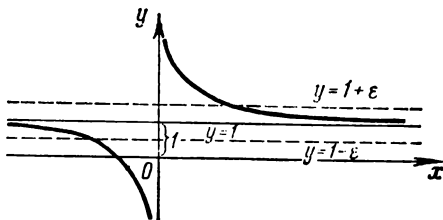



Fig. 33

A significação dos símbolos $x \to \infty$ e $x \to -\infty$ torna evidente a das expressões

«$f(x)$ tende para b quando $x \to +\infty$» e

«$f(x)$ tende para b quando $x \to -\infty$»,

que se nota simbòlicamente por

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

§ 3. Funções que tendem para o infinito. Funções limitadas

Estudámos os casos em que a função $f(x)$ tende para um certo limite b quando $x \to a$ ou $x \to \infty$.

Consideremos agora o caso em que a função $y = f(x)$ tende para infinito quando a variável x varia duma certa maneira.

Definição — 1. A função $f(x)$ tende para o infinito quando $x \to a$, isto é, $f(x)$ é *infinitamente grande* quando $x \to a$, se para cada número positivo M, por maior que seja, se pode encontrar um número $\delta > 0$ tal que para todos os valores de x diferentes de a e verificando a condição $|x - a| < \delta$, a desigualdade $|f(x)| > M$ é satisfeita.

Se $f(x)$ tende para infinito quando $x \to a$, escreve-se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

ou $f(x) \to \infty$ quando $x \to a$.

Se $f(x)$ tende para o infinito quando $x \to a$, tomando apenas valores positivos ou valores negativos, escreve-se respectivamente $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exemplo — 1. Mostremos que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$. Com efeito, qualquer que seja $M > 0$ tem-se:

$$\frac{1}{(1-x)^2} > M$$

desde que

$$(1-x)^2 < \frac{1}{M}$$

ou

$$|1 - x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta.$$

A função $\frac{1}{(1-x)^2}$ apenas toma valores positivos (fig. 34).

Exemplo — 2. Mostremos que $\lim\limits_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = \infty$. Com efeito qualquer que seja $M > 0$ tem-se

$$\left|-\frac{1}{x}\right| > M$$

desde que

$$|x| = |x - 0| < \frac{1}{M} = \delta.$$

Aqui $\left(-\frac{1}{x}\right) > 0$ para $x < 0$ e $\left(-\frac{1}{x}\right) < 0$ para $x > 0$ (fig. 35).

Se a função $f(x)$ tende para infinito quando $x \to \infty$, escreve-se:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

e, em particular, pode-se ter

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Por exemplo,

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$$

Nota — 1. Pode acontecer que a função $y = f(x)$ não tenda nem para um limite finito nem para infinito quando $x \to a$ ou $x \to \infty$.

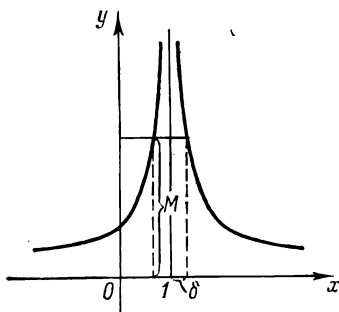



Fig. 34

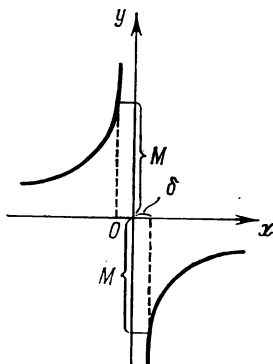



Fig. 35

Exemplo — 3. A função $y = \operatorname{sen} x$ é definida no intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$, mas não tende para um limite finito ou para infinito quando $x \to +\infty$ (fig. 36).

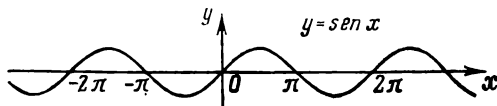



Fig. 36

Exemplo — 4. A função $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ que é definida para todos os valores de x, excepto $x = 0$, não tende para nenhum limite finito ou infinito quando $x \to 0$. O gráfico desta função está representado na figura 37.

Definição — 2. A função $y = f(x)$ diz-se *limitada* no domínio de definição da variável x, se existe um número positivo M tal que

para todos os valores de x pertencentes a este domínio a desigualdade $|f(x)| \leqslant M$ é verificada. Se tal número não existe, diz-se que a função $f(x)$ *não é limitada* neste domínio.

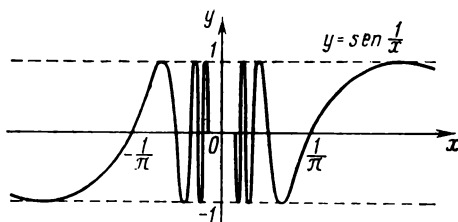



Fig. 37

Exemplo — 5. A função $y = \text{sen}\, x$, definida no intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$, é limitada, visto que para todos os valores de x

$$|\text{sen}\, x| \leqslant 1 = M.$$

Definição — 3. A função $f(x)$ *diz-se limitada* quando $x \to a$, se existe uma vizinhança de centro a na qual a função é limitada.

Definição — 4. A função $y = f(x)$ diz-se limitada quando $x \to \infty$, se existe um número $N > 0$ tal que, para todos os valores de x verificando a desigualdade $|x| > N$, a função $f(x)$ é limitada.

O teorema seguinte permite concluir se a função $f(x)$, quando tende para um limite, é limitada ou não.

Teorema — 1. *Se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *e se* b *é um número finito, a função* f(x) *é limitada quando* $x \to a$.

Demonstração — Resulta da desigualdade $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ que para todo $\varepsilon > 0$, existe um número δ tal que na vizinhança $a - \delta < x < a + \delta$ a desigualdade

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

ou

$$|f(x)| < |b| + \varepsilon$$

é satisfeita.

Isto exprime justamente que a função $f(x)$ é limitada quando $x \to a$.

Nota — 2. Resulta da definição de uma função limitada $f(x)$ que se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

isto é, se $f(x)$ é infinitamente grande, a função não é limitada. A propriedade inversa não é verdadeira: uma função não limitada pode não ser infinitamente grande.

Por exemplo, a função $y = x$ sen x não é limitada quando $x \to \infty$, visto que para todo $M > 0$ se pode indicar valores de x tais que $|x \text{ sen } x| > M$. Mas a função $y = x$ sen x não é infinitamente grande visto que ela se anula nos pontos $x = 0, \pi, 2\pi \ldots$. O gráfico da função $y = x$ sen x é dado na figura 38.

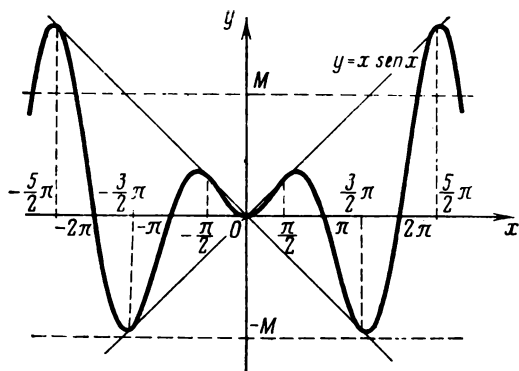



Fig. 38

Teorema — 2. *Se* $\lim_{x \to a} f(x) = b \neq 0$, *a função* $y = \frac{1}{f(x)}$ *é limitada quando* $x \to a$.

Demonstração — Resulta das condições do teorema que qualquer que seja o número $\varepsilon > 0$ se tem numa certa vizinhança do ponto $x = a$ $|f(x) - b| < \varepsilon$ ou $||f(x)| - |b|| < \varepsilon$ ou $-\varepsilon < |f(x)| - |b| < \varepsilon$ ou $|b| - \varepsilon < |f(x)| < |b| + \varepsilon$.

Resulta destas desigualdades:

$$\frac{1}{|b| - \varepsilon} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{|b| + \varepsilon}$$

Tomando, por exemplo, $\varepsilon = \frac{1}{10}|b|$ temos:

$$\frac{10}{9|b|} > \frac{1}{|f(x)|} > \frac{10}{11|b|}.$$

Isto exprime que a função $\frac{1}{f(x)}$ é limitada.

§ 4. Infinitamente pequenos e as suas propriedades fundamentais

Neste parágrafo vamos estudar as funções que tendem para zero quando o argumento x varia duma certa maneira.

Definição — Diz-se que $\alpha = \alpha(x)$ *é um infinitamente pequeno* quando $x \to a$ ou quando $x \to \infty$ se $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

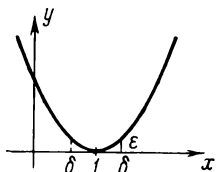
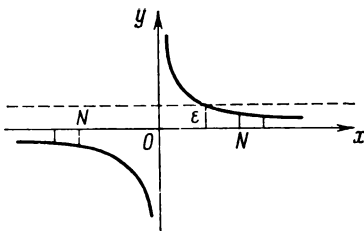



Fig. 39 Fig. 40

Resulta da definição de limite que se, por exemplo, se tem $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, então para todo número positivo ε arbitràriamente pequeno, existe um $\delta > 0$ tal que para todos os x satisfazendo a desigualdade $|x - a| < \delta$ se tem $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Exemplo — 1. A função $\alpha = (x - 1)^2$ é um infinitamente pequeno quando $x \to 1$, porque $\lim\limits_{x \to 1} \alpha = \lim\limits_{x \to 1} (x - 1)^2 = 0$ (fig. 39).

Exemplo — 2. A função $\alpha = \frac{1}{x}$ é um infinitamente pequeno, quando $x \to \infty$ (fig. 40) (ver *Exemplo* — 3. § 2).

Demonstremos agora a importante proposição seguinte.

Teorema — 1. *Se a função* $y = f(x)$ *puder ser posta sob a forma da soma dum número constante* b *e dum infinitamente pequeno* α*:*

$$y = b + \alpha, \tag{1}$$

então

$$\lim y = b \text{ (quando } x \to a \text{ ou } x \to \infty).$$

Inversamente, *se lim* $y = b$ *pode-se escrever* $y = b + \alpha$ *onde* α *é um infinitamente pequeno.*

Demonstração — Resulta da igualdade (1) que $|y - b| = |\alpha|$. Mas qualquer que seja ε, todos os valores de α a partir de um certo valor verificam a desigualdade $|\alpha| < \varepsilon$, e, por conseguinte, todos os valores de y a partir dum certo valor verificarão a desigualdade $|y - b| < \varepsilon$. Isso significa justamente que $\lim y = b$.

Inversamente: se $\lim y = b$, então qualquer que seja ε para todos os valores de y a partir de um deles tem-se $|y - b| < \varepsilon$. Façamos $y - b = \alpha$, então para todos os valores de α a partir de um deles tem-se $|\alpha| < \varepsilon$, e α é um infinitamente pequeno.

Exemplo — 3. Seja a função (fig. 41)

$$y = 1 + \frac{1}{x},$$

então

$$\lim_{x\to\infty} y = 1.$$

Inversamente, se

$$\lim_{x\to\infty} y = 1,$$

podemos exprimir a variável y sob a forma da soma do seu valor limite 1 e de um infinitamente pequeno $\alpha = \frac{1}{x}$, isto é

$$y = 1 + \alpha.$$

Fig. 41

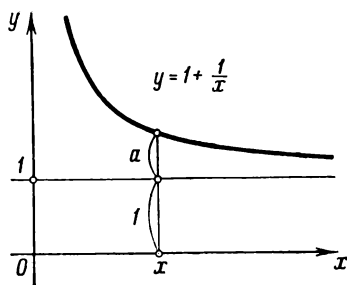
Teorema — 2. *Se $\alpha = \alpha(x)$ tende para zero para $x \to a$ (ou para $x \to \infty$) e não se anula, então $y = \frac{1}{\alpha}$ tende para o infinito.*

Demonstração — Para todo $M > 0$ arbitràriamente grande a desigualdade $\frac{1}{|\alpha|} > M$ é verificada desde que a desigualdade $|\alpha| < \frac{1}{M}$ é satisfeita. Esta última desigualdade é satisfeita para todos os valores de α a partir de um deles, visto que $\alpha(x) \to 0$.

Teorema — 3. *A soma algébrica de um número finito de infinitamente pequenos é um infinitamente pequeno.*

Demonstração — Estudaremos o caso de dois infinitamente pequenos, pois para um número maior de infinitamente pequenos a demonstração é a mesma.

Seja $u(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ onde $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x\to a} \beta(x) = 0$. Demonstremos que para $\varepsilon > 0$ arbitràriamente pequeno se pode encontrar um $\delta > 0$ tal que a desigualdade $|x - a| < \delta$ implica a desigualdade $|u| < \varepsilon$. Sendo $\alpha(x)$ um infinitamente pequeno pode-se encontrar um δ tal que na vizinhança de centro a e de raio δ_1 se tenha

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sendo $\beta(x)$ um infinitamente pequeno, numa vizinhança de centro a e de raio δ_2 ter-se-á: $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tomemos δ igual ao menor dos dois números δ_1 e δ_2. Então para uma vizinhança de centro a e de raio δ tem-se $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$; $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por conseguinte, teremos nesta vizinhança

$$|u| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

isto é, $|u| < \varepsilon$, c. q. d.

Demonstra-se duma maneira análoga o caso

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \beta(x) = 0.$$

Nota — Com o decorrer das lições, teremos de considerar somas de infinitamente pequenos tais que o número de termos aumenta paralelamente ao decréscimo de cada um deles. Neste caso o teorema precedente pode ser tomado por defeito. Consideremos, por exemplo, a soma de x termos $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x}$ onde x apenas toma valores inteiros positivos ($x = 1, 2, \ldots, n, \ldots$). É evidente que cada termo é um infinitamente pequeno quando $x \to \infty$, mas a soma $u = 1$ não o é.

Teorema — 4. *O produto dum infinitamente pequeno* $\alpha = \alpha(x)$ *por uma função limitada* $z = z(\alpha)$ *é um infinitamente pequeno quando* $x \to a$ *(ou* $x \to \infty$*).*

Demonstração — Daremos a demonstração para o caso de $x \to a$. Pode-se indicar um número $M > 0$ tal que numa certa vizinhança do ponto $x = a$ a desigualdade $|z| < M$ é satisfeita. Para cada $\varepsilon > 0$, pode-se encontrar uma vizinhança onde a desigualdade $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$ é satisfeita. Para todos os pontos da mais pequena destas vizinhanças ter-se-á

$$|\alpha z| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

O que exprime que αz é um infinitamente pequeno. A demonstração é idêntica para o caso em que $x \to \infty$. Do teorema demonstrado resulta:

Corolário — 1. Se $\lim \alpha = 0$, $\lim \beta = 0$, então $\lim \alpha\beta = 0$, porque $\beta(x)$ é uma função limitada. Este resultado estende-se ao caso dum número finito qualquer de infinitamente pequenos.

Corolário — 2. Se $\lim \alpha = 0$ e $c = \text{const}$, então $\lim c\alpha = 0$.

Teorema — 5. *O quociente* $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ *de um infinitamente pequeno* $\alpha(x)$ *e duma função cujo limite é diferente de zero é um infinitamente pequeno.*

Demonstração — Seja $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim z(x) = b \neq 0$. Resulta do teorema 2 § 3 que $\frac{1}{z(\alpha)}$ é uma variável limitada. Eis porque a fracção $\frac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x)\frac{1}{z(x)}$ é o produto dum infinitamente pequeno por uma grandeza limitada; logo é um infinitamente pequeno.

§ 5. Teoremas fundamentais sobre os limites

Néste parágrafo bem como no parágrafo precedente teremos de considerar funções que dependem duma mesma variável independente x e para as quais $x \to a$ ou $x \to \infty$.

Daremos a demonstração para um destes casos, visto que a demonstração do outro caso é semelhante. Por vezes não escrevemos já $x \to a$ ou $x \to \infty$ subentendendo um ou outro.

Teorema — 1. *O limite da soma algébrica de dois, de três ou dum número finito qualquer de variáveis é igual à soma algébrica dos limites destas variáveis:*

$$\lim(u_1 + \ldots + u_k) = \lim u_1 + \ldots + \lim u_k.$$

Demonstração — Daremos a demonstração para o caso de dois termos, visto que ela se estende da mesma maneira a um número qualquer de termos. Seja $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$. Então em virtude do teorema 1 § 4 pode-se escrever:

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

onde α_1 e α_2 são infinitamente pequenos. Por conseguinte,

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Como $(a_1 + a_2)$ é uma constante e $(\alpha_1 + \alpha_2)$ um infinitamente pequeno, pode-se escrever sempre baseado no teorema 1 § 4 que

$$\lim(u_1 + u_2) = a_1 + a_2 = \lim u_1 + \lim u_2.$$

Exemplo — 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 1 + 0 = 1.$$

Teorema — 2. *O limite do produto de dois, de três ou de um número finito qualquer de variáveis é igual ao produto dos limites*

destas variáveis

$$\lim u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_k = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot \ldots \cdot \lim u_k.$$

Demonstração — A fim de não complicar a demonstração consideraremos o caso de dois factores. Seja $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$. Então,

$$u_1 = a_1 + \alpha_1, \quad u_2 = a_2 + \alpha_2,$$

$$u_1 u_2 = (a_1 + \alpha_1)(a_2 + \alpha_2) = a_1 a_2 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2.$$

O produto $a_1 a_2$ é uma constante. Com base nos teoremas do § 4 a expressão $a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2$ é um infinitamente pequeno. Por conseguinte, $\lim u_1 u_2 = a_1 a_2 = \lim u_1 \cdot \lim u_2$.

Corolário — Pode-se tirar um factor constante de debaixo do sinal de limite. Com efeito, se $\lim u_1 = a_1$ e c é uma constante tem-se, por conseguinte, $\lim c = c$, donde $\lim (cu_1) = \lim c \cdot \lim u_1 = c \cdot \lim u_1$, c. q. d.

Exemplo — 2. $\lim\limits_{x \to 2} 5x^3 = 5 \lim\limits_{x \to 2} x^3 = 5 \cdot 8 = 40.$

Teorema — 3. *O limite do quociente de duas variáveis é igual ao quociente dos limites destas variáveis, se o limite do denominador for diferente de zero.*

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \quad \text{se } \lim v \neq 0.$$

Demonstração — Seja $\lim u = a$, $\lim v = b \neq 0$. Então $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$ onde α e β são infinitamente pequenos.

Escrevamos a identidade

$$\frac{u}{v} = \frac{a + \alpha}{b + \beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a + \alpha}{b + \beta} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b + \beta)}$$

ou

$$\frac{u}{v} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - \beta a}{b(b + \beta)}.$$

A fracção $\frac{a}{b}$ é um número constante e a fracção $\frac{\alpha b - \beta a}{b(b + \beta)}$ é segundo os teoremas 4 e 5 do § 4 um infinitamente pequeno, visto que $\alpha b - \beta a$ é um infinitamente pequeno e que o limite do denominador $b(b + \beta)$ é igual a $b^2 \neq 0$. Logo, $\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}$.

Exemplo — 3.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+5}{4x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x-2)}=\frac{3\lim\limits_{x\to 1}x+5}{4\lim\limits_{x\to 1}x-2}=\frac{3\cdot 1+5}{4\cdot 1-2}=\frac{8}{2}=4.$$

Utilizamos aqui o teorema relativo ao limite do quociente de duas funções, porque o limite do denominador é diferente de zero quando $x\to 1$. Se o limite do denominador é igual a zero, não se pode servir deste teorema. É necessário neste caso fazer um estudo detalhado.

Exemplo — 4. Encontrar o limite $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ Aqui o numerador e o denominador tendem para zero quando $x\to 2$. Eis porque o teorema 3 não pode ser aplicado. Efectuemos as transformações seguintes:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

É lícito efectuar-se esta transformação para todos os x diferentes de 2. Eis porque, se pode escrever, partindo da definição de limite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

Exemplo — 5. Encontrar o limite $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$. Quando $x\to 1$, o denominador tende para zero, enquanto que o numerador tende para 1. Logo, o limite da variável inversa é igual a zero, isto é,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}x}=\frac{0}{1}=0.$$

Logo, teremos em virtude do teorema 1 do parágrafo precedente

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\infty.$$

Teorema — 4. *Se as funções* $u=u(x)$, $z=z(x)$, $v=v(x)$, *estão ligadas entre si pela dupla desigualdade* $u\leqslant z\leqslant v$ *e se* $u(x)$ *e* $v(x)$ *tendem para um mesmo limite* b *quando* $x\to a$ *(ou* $x\to\infty$*), então* $z=z(x)$ *tende também para o mesmo limite quando* $x\to a$ *(ou* $x\to\infty$*).*

Demonstração — Para fixar ideias vamos considerar a variação da função quando $x\to a$. Resulta das desigualdades $u\leqslant z\leqslant v$

$$u-b\leqslant z-b\leqslant v-b;$$

segundo as condições do teorema

$$\lim_{x\to a}u=b,\qquad \lim_{x\to a}v=b.$$

Por conseguinte, para todo $\varepsilon>0$ pode-se indicar uma vizinhança de centro a onde a desigualdade $|u-b|<\varepsilon$ é satisfeita; do mesmo modo, pode-se indicar uma vizinhança de centro a onde a desigual-

dade $|v - b| < \varepsilon$ é também satisfeita. Na mais pequena destas vizinhanças as desigualdades

$$-\varepsilon < u - b < \varepsilon \quad \text{e} \quad -\varepsilon < v - b < \varepsilon$$

serão satisfeitas e, por conseguinte, as desigualdades

$$-\varepsilon < z - b < \varepsilon$$

serão satisfeitas, isto é

$$\lim_{x \to 1} z = b.$$

Teorema — 5. *Se a função* y *não toma valores negativos* $y \geqslant 0$ *quando* $x \to a$ *(ou* $x \to \infty$*), e se ela tende para um limite* b, *então, este número* b *não é negativo:* $b \geqslant 0$.

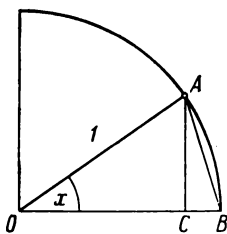



Fig. 42

Demonstração — Suponhamos que b é negativo $b < 0$, então, $|y - b| \geqslant |b|$, isto é, que o valor absoluto da diferença $|y - b|$ é maior que o número positivo $|b|$ e, por conseguinte, não pode tender para zero quando $x \to a$. Mas então, quando $x \to a$, y não pode tender para b, o que é contrário à hipótese. Logo, a suposição de que $b < 0$ conduz-nos a uma contradição. Por conseguinte, $b \geqslant 0$.

Demonstra-se, duma maneira análoga, que se $y \leqslant 0$, $\lim y \leqslant 0$.

Teorema — 6. *Se as funções* $u = u(x)$ *e* $v = v(x)$ *satisfaxem à desigualdade* $v \geqslant u$ *e se os limites destas funções existem quando* $x \to a$ *(ou* $x \to \infty$*), então,* $\lim v \geqslant \lim u$.

Demonstração — Segundo a hipótese $v - u \geqslant 0$ e em virtude do teorema 5 $\lim (v - u) \geqslant 0$ ou $\lim v - \lim u \geqslant 0$, isto é, $\lim v \geqslant \lim u$.

Exemplo — 6. Mostremos que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

Vê-se segundo a figura 42 que se $OA = 1$, $x > 0$, então, $AC = \operatorname{sen} x$, $\overset{\frown}{AB} = x$, $\operatorname{sen} x < x$. É evidente que se $x < 0$, $|\operatorname{sen} x| < |x|$. Resulta destas desigualdades, em virtude dos teoremas 5 e 6, que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

Exemplo — 7. Mostremos que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 0$.

Com efeito, $\left|\operatorname{sen} \frac{x}{2}\right| < |\operatorname{sen} x|$; logo, $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 0$.

Exemplo — 8. Mostremos que $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$. Notemos que

$$\cos x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2},$$

logo,

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 1 - 0 = 1.$$

No decorrer do estudo das questões relativas ao limite de certas variáveis, é-se conduzido a resolver os dois problemas seguintes:

1) Demonstrar que o limite existe e determinar os extremos entre os quais está compreendido esse limite;
2) Calcular esse limite com o grau de precisão desejado.

A resposta à primeira pergunta é muitas vezes dada pelo teorema seguinte.

Teorema — 7. *Se a variável* v *é crescente, isto é, se todos os seus valores consequentes são maiores que os valores antecedentes, e se ela é limitada, isto é,* $v < M$, *então, esta variável tem um limite lim* $v = a$ *onde* $a \leqslant M$.

Pode-se enunciar um teorema análogo para as variáveis decrescentes limitadas.

Não damos aqui a demonstração deste teorema, porque ele exige a aplicação da teoria dos números reais que não desenvolvemos neste livro.

Nos dois parágrafos seguintes, calcularemos os limites de duas funções tendo uma larga aplicação em análise matemática.

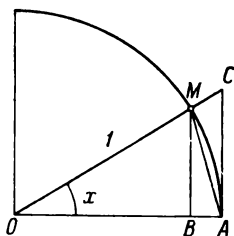



Fig. 43

§ 6. Limite da função $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ quando $x \to 0$

Esta função não é definida para $x = 0$, visto que o numerador e o denominador da fracção se anulam neste ponto. Calculemos o limite desta função quando $x \to 0$. Consideremos a circunferência de raio 1 (fig. 43). Designemos por x o ângulo ao centro MOB; temos $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Resulta imediatamente da figura 43:

$$\text{área do triângulo } MOA < \text{área do sector } MOA < \text{área do triângulo } COA. \qquad (1)$$

$$\text{Área do triângulo } MOA = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x.$$

$$\text{Área do sector } MOA = \frac{1}{2} OA \cdot \widehat{AM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x.$$

$$\text{Área do triângulo } COA = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Simplificando por $\frac{1}{2}$, a desigualdade (1) transforma-se em:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

Dividamos todos os membros por sen x:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x},$$

ou

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x.$$

Obtivemos esta desigualdade supondo $x > 0$.

Notemos que $\frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e $\cos(-x) = \cos x$.
Logo, a desigualdade é ainda verificada para $x < 0$. Mas $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, $\lim_{x\to 0} 1 = 1$.

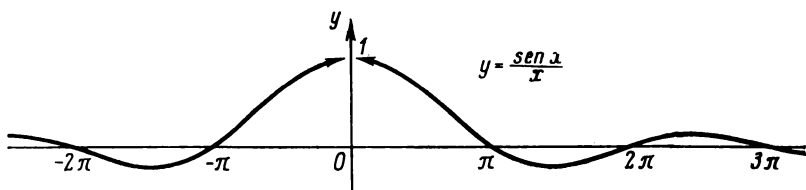



Fig. 44

Por conseguinte, a variável $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ está compreendida entre duas variáveis que tendem para um mesmo limite igual a 1. Assim, em virtude do teorema 4 do parágrafo precedente

$$\lim_{\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

O gráfico da função $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ está traçado sobre a figura 44.

Exemplos —

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{x} = \lim_{x\to 0} k \frac{\operatorname{sen} kx}{kx} = k \lim_{\substack{x\to 0 \\ (kx\to 0)}} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{(kx)} = k \cdot 1 = k$ ($k = \text{const}$).

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\,\text{sen}\,\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,\alpha x}{\text{sen}\,\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\frac{\text{sen}\,\alpha x}{\alpha x}}{\frac{\text{sen}\,\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,\beta x}{\beta x}}=$

$=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}\quad(\alpha=\text{const},\ \beta=\text{const}).$

§ 7. O número *e*

Consideremos a grandeza variável

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

onde n é uma variável crescente tomando sucessivamente os valores 1, 2, 3, ...

Teorema — 1. *A variável* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *tem um limite compreendido entre 2 e 3 quando* $n\to\infty$.

Demonstração — Segundo a fórmula do binómio de Newton podemos escrever:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n. \qquad (1)$$

Efectuando certas transformações algébricas evidentes (1), encontramos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$
$$\times\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (2)$$

Verifica-se desta última igualdade que a grandeza variável $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é uma variável crescente quando n cresce. Com efeito, quando se passa do valor n ao valor $n+1$ cada termo desta soma aumenta

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right), \quad \text{etc.}$$

e mais um novo termo aparece. (Todos os termos do desenvolvimento são positivos.)

Mostremos que a grandeza variável $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é limitada. Notando que $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$, etc., obtém-se da expressão (2) a desigualdade

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}.$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2}; \quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3}; \quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Podemos escrever a desigualdade

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Os termos que sublinhamos constituem uma progressão geométrica de razão $q=\frac{1}{2}$, e cujo primeiro termo é $a=1$. Daí

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]=$$

$$=1+\frac{a-aq^n}{1-q}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]<3.$$

Por conseguinte, para todos os n temos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Resulta da desigualdade (2)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant 2.$$

Assim deduzimos a dupla desigualdade

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3. \qquad (3)$$

Provamos que a variável $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é limitada.

Recapitulando, vemos que a variável $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é crescente e limitada; segundo o teorema 7 do § 5 ela tem um limite. Designa-se este limite pela letra e.

Definição — Chama-se *número e* o limite da variável $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando $n\to\infty$.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (*)$$

Resulta da desigualdade (3), em virtude do teorema 6 § 5, que o número e verifica a dupla desigualdade $2\leqslant e\leqslant 3$. O teorema está demonstrado.

O número e é um número irracional. Indicaremos no seguimento, um método que o permite calcular com a precisão desejada. O valor aproximado deste número a menos de $\left(\frac{1}{10}\right)^{10}$ é

$$e=2{,}7182818284\ldots$$

Teorema — 2. *A função* $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *tende para o limite* e *quando* x *tende para o infinito, isto é,*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

(*) Pode-se demonstrar que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$ quando $n\to\infty$, mesmo se n não for uma variável crescente.

Demonstração — Provamos que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ quando n tende para infinito tomando valores positivos inteiros. Suponhamos agora que $x \to \infty$ tomando valores fraccionários ou negativos.

1) Seja $x \to +\infty$. Cada valor de x está compreendido entre dois números positivos inteiros:

$$n \leqslant x < n+1.$$

Neste caso teremos as desigualdades seguintes:

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

$$1+\frac{1}{n} \geqslant 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

Se $x \to \infty$, é evidente que $n \to \infty$. Calculemos o limite das variáveis entre as quais está compreendida a expressão $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

logo, (segundo o teorema 4 § 5)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{4}$$

2) Seja $x \to -\infty$. Introduzamos uma nova variável $t = -(x+1)$ ou $x = -(t+1)$. Quando $t \to +\infty$ tem-se $x \to -\infty$. Pode-se escrever

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right) = e\cdot 1 = e.$$

O teorema está demonstrado. O gráfico da função $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ está traçado sobre a figura 45.

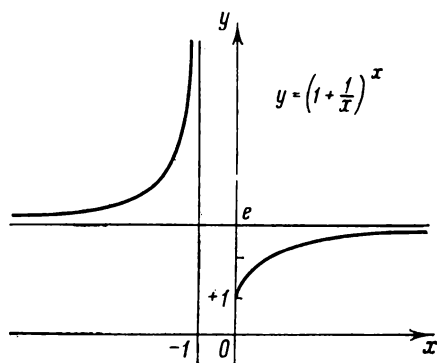



Fig. 45

Se se põe $\frac{1}{x} = \alpha$ na igualdade (4), tem-se $\alpha \to 0$ (mas $\alpha \neq 0$) quando $x \to \infty$ e tem-se

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Exemplos —

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = e\cdot 1 = e.$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\cdot e\cdot e=e^{3}.$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=e^{2}.$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{(x-1)+4}=$

$=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+4}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=e^{4}\cdot 1=e^{4}.$

§ 8. Logaritmos neperianos

Definimos no § 8 do capítulo I a função logarítmica $y=\log_a x$. O número a chama-se base do logaritmo. Se $a=10$, y chama-se o logaritmo décimal do número x que se designa pela notação $y=\log x$.

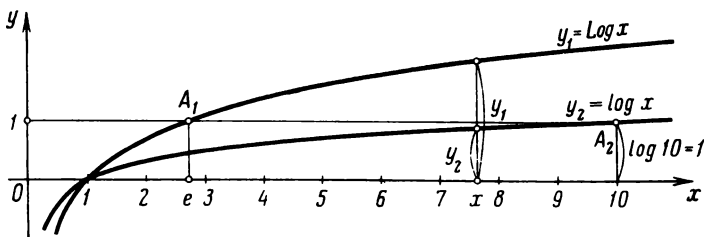



Fig. 46

Conhece-se as tábuas dos logaritmos decimais a partir do curso do ensino secundário; estas tábuas chamam-se tábuas de Briggs, do nome do sábio inglês Briggs (1556 — 1630).

Chama-se *logaritmos naturais* ou *logaritmos neperianos* aos logaritmos cuja base é o número $e=2{,}71828...$, do nome de um dos primeiros inventores das tábuas de logaritmos, o matemático Neper (1550-1617) (*). Logo, se $e^y=x$, y diz-se o logaritmo natural do número x. Escreve-se então $y=\text{Log}\,x$, em vez de $y=\log_e x$. Os gráficos das funções $y=\text{Log}\,x$ e $y=\log x$ são dados sobre a figura 46.

(*) As primeiras tábuas de logaritmos foram elaboradas pelo matemático suíço Bürgi (1552-1632) com uma base vizinha do número e.

Estabeleçamos agora a relação que existe entre os logaritmos decimais e naturais de um mesmo número x.

Seja $y = \log x$ ou $x = 10^y$. Tomemos o logarítmo da base e dos dois membros desta última igualdade. Encontramos $\operatorname{Log} x = y \operatorname{Log} 10$. donde $y = \frac{1}{\operatorname{Log} 10} \operatorname{Log} x$. Substituindo y pelo seu valor tem-se $\log x = \frac{1}{\operatorname{Log} 10} \operatorname{Log} x$.

Assim, se se conhece o logaritmo natural do número x, obtém-se o seu logaritmo decimal multiplicando o logaritmo natural de x pelo factor $M = \frac{1}{\operatorname{Log} 10} \approx 0{,}434294$ que é independente do número x. O número M chama-se *módulo de transição* dos logaritmos naturais aos logaritmos decimais:

$$\log x = M \cdot \operatorname{Log} x.$$

Pondo nesta igualdade $x = e$ encontra-se o valor do número M expresso com o auxílio dos logaritmos decimais:

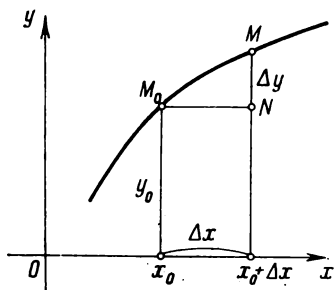
$$\log e = M \ (\operatorname{Log} e = 1).$$

Os logaritmos naturais exprimem-se com o auxílio dos logaritmos decimais pela fórmula:

Fig. 47

$$\operatorname{Log} x = \frac{1}{M} \log x$$

onde

$$\frac{1}{M} = 2{,}302585.$$

§ 9. Continuidade das funções

Seja $y = f(x)$ uma função definida para o valor $x = x_0$ e numa certa vizinhança de centro x_0. Seja $y_0 = f(x_0)$.

Se se dá à variável x um acrescimo Δx positivo ou negativo (isso não tem aliás nenhuma importância), ela fica $x_0 + \Delta x$, e a função y sofre igualmente um acréscimo Δy. O novo valor da função é $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ (fig. 47)

O acréscimo da função é dado pela fórmula

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Definição — 1. A função $y = f(x)$ diz-se *contínua para o valor* $x = x_0$ (ou no ponto $x = x_0$) se ela está definida numa certa vizi-

nhança do ponto x_0 (e igualmente no ponto x_0) e se

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \tag{1}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0. \tag{2}$$

Geomètricamente a continuidade duma função num dado ponto significa que a diferença das ordenadas do gráfico da função $y = f(x)$ nos pontos $x_0 + \Delta x$ e x_0 é arbitràriamente pequena em valor absoluto desde que $|\Delta x|$ seja suficientemente pequeno.

Exemplo — 1. Provemos que a função $y = x^2$ é contínua em todo o ponto x_0. Com efeito,

$$y_0 = x_0^2, \quad y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2,$$

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 2x \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

independentemente da maneira como Δx tende para zero (v. fig. 48, *a*, *b*).

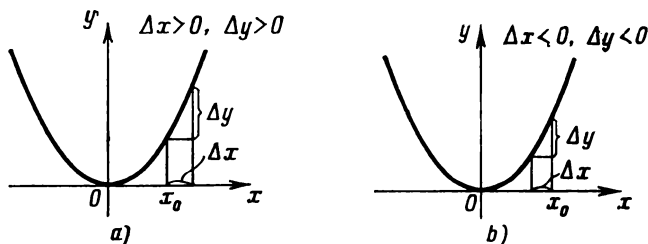



Fig. 48

Exemplo — 2. Mostremos que a função $y = \operatorname{sen} x$ é contínua em todo o ponto x_0. Com efeito,

$$y_0 = \operatorname{sen} x_0, \quad y_0 + \Delta y = \operatorname{sen}(x_0 + \Delta x),$$

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x_0 + \Delta x) - \operatorname{sen} x_0 = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Demonstramos que $\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} = 0$ (exemplo 7 § 5). A função $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ é limitada. Logo, $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Por raciocínios análogos aos dados nos exemplos 1 e 2 poder-se-ia, considerando separadamente cada função elementar, demonstrar o teorema seguinte.

Teorema — Toda a função elementar é contínua em todo o ponto onde ela é definida.

A condição de continuidade (2) pode escrever-se como se segue:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

ou

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

mas

$$x_0 = \lim_{x \to x_0} x.$$

Por conseguinte,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x), \qquad (3)$$

isto é, que para encontrar o limite duma função contínua quando $x \to x_0$, basta substituir a variável x na expressão de $f(x)$ pelo seu valor x_0.

Exemplo — 3. A função $y = x^2$ é contínua em todo o ponto x_0 e, por consequência,

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2, \quad \lim_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9.$$

Exemplo — 4. A função $y = \text{sen}\, x$ é contínua em todo o ponto e, por consequência,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \text{sen}\, x = \text{sen}\, \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exemplo — 5. A função $y = e^x$ é contínua em todo o ponto e, por consequência,

$$\lim_{x \to a} e^x = e^a.$$

Exemplo — 6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{Log}\,(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \text{Log}\,(1+x) = \lim\limits_{x \to 0} \text{Log}\,[(1+x)^{\frac{1}{x}}]$.

Ora $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$; a função $\text{Log}\, z$ é contínua para $z > 0$ e, por conseguinte, para $z = e$, tem-se $\lim\limits_{x \to 0} \text{Log}\,[(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \text{Log}\,[\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}] = \text{Log}\, e = 1$.

Definição — 2. Uma função $y = f(x)$ contínua em todo o ponto do intervalo (a, b), onde $a < b$, diz-se *contínua neste intervalo.*

Se a função é definida para $x = a$ e se $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, diz-se que a função $f(x)$ é *contínua à direita* no ponto $x = a$. Se $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$, diz-se que ela é *contínua à esquerda* no ponto $x = b$.

Se a função $f(x)$ é contínua em cada ponto do intervalo (a, b), bem como nas extremidades desse intervalo, diz-se que a função $f(x)$ *é contínua no intervalo fechado ou no segmento* $[a, b]$.

Exemplo — 7. A função $y = x^2$ é contínua em todo o intervalo fechado $[a, b]$, o que resulta directamente do exemplo 1.

Se uma das condições que exige a continuidade não é satisfeita, isto é, se a função $f(x)$ não está definida no ponto $x = x_0$ ou que o limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ não existe neste ponto, ou seja, ainda que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ quando x tende arbitràriamente para x_0 se bem que as expressões à esquerda e à direita da desigualdade existam, a função $y = f(x)$ diz-se *descontínua* ao ponto $x = x_0$. Neste caso o ponto $x = x_0$ diz-se ponto de *descontinuidade da função*.

Exemplo — 8. A função $y = \frac{1}{x}$ é descontínua no ponto $x = 0$. Com efeito, para $x = 0$, a função não é definida:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

(ver fig. 35). Vê-se fàcilmente que esta função é definida para todo o valor de $x \neq 0$.

Exemplo — 9. A função $y = 2^{\frac{1}{x}}$ é descontínua no ponto $x = 0$. Com efeito, $\lim\limits_{x \to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$. Para $x = 0$ a função não é definida (fig. 49).

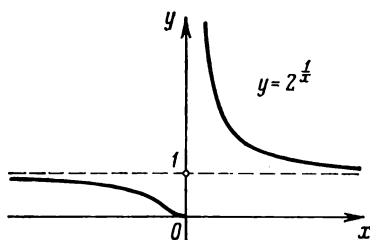



Fig. 49

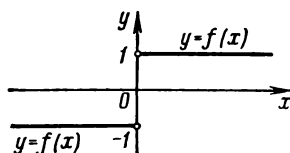



Fig. 50

Exemplo — 10. Consideremos a função $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Para $x < 0$, $\frac{x}{|x|} = -1$; para $x > 0$, $\frac{x}{|x|} = 1$. Logo, $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} \frac{x}{|x|} = -1$; $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{x}{|x|} = 1$; para $x = 0$ a função não é definida. Assim, provamos que a função $f(x) = \frac{x}{|x|}$ é descontínua no ponto $x = 0$ (fig. 50).

Exemplo — 11. A função $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, estudada no exemplo 4 §3, é descontínua para $x = 0$.

Definição — 3. Se a função $f(x)$ é tal que os limites $\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ e $\lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ existem e são finitos mas que $\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x)$ ou que o valor da função $f(x)$ não é determinada no ponto $x = x_0$, o ponto $x = x_0$ chama-se *ponto de descontinuidade de primeira espécie.* (Por exemplo, o ponto $x = 0$ é um ponto de descontinuidade de primeira espécie para a função do exemplo 10.)

§ 10. Propriedades das funções contínuas

Neste parágrafo exporemos certas propriedades das funções contínuas num segmento. Estas propriedades serão enunciadas sob a forma de teoremas sem demonstração.

Teorema — 1. *Se a função* $y = f(x)$ *é contínua sobre o segmento* $[a, b]$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, *então, existe pelo menos um ponto* $x = x_1$ *tal que o valor da função neste ponto satisfaz a desigualdade*

$$f(x_1) \geqslant f(x),$$

onde x *é um outro ponto qualquer deste segmento; do mesmo modo existe pelo menos um ponto* x_2 *tal que o valor da função neste ponto satisfaz a desigualdade*

$$f(x_2) \leqslant f(x).$$

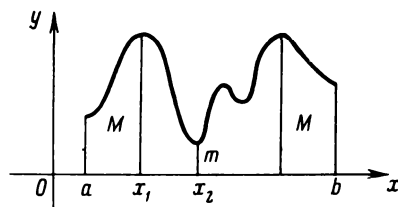



Fig. 51

Chamaremos $f(x_1)$ o *maior valor* da função $y = f(x)$ sobre o segmento $[a, b]$ e $f(x_2)$ o *menor valor* da função $f(x)$ sobre esse segmento. Pode-se, então, enunciar este teorema como se segue:

Toda a função contínua no segmento $a \leqslant x \leqslant b$ *atinge pelo menos uma vez sobre este segmento, o seu valor máximo* M *e o seu valor mínimo* m.

A significação deste teorema está claramente esclarecido pela figura 51.

Nota — O teorema enunciado deixa de ser verdadeiro se a função é dada num intervalo aberto. Assim, por exemplo, para a função $y = x$, dada no intervalo $0 < x < 1$, não existe máximo ou mínimo. Com efeito, não existe máximo e mínimo valor para a variável x neste intervalo. (Não existe ponto mais à esquerda, porque qualquer que seja o ponto x^* escolhido, pode-se sempre indicar um ponto mais à esquerda, por exemplo, o ponto $\frac{x^*}{2}$. Do mesmo modo, não existe ponto

mais à direita, e, eis porque não pode existir nem máximo nem mínimo valor para a função $y = x$.)

Teorema — 2. *Se a função* y = f (x) *é contínua sobre o segmento* [a, b] *e se os valores nas extremidades deste segmento são de sinais contrários, existe, então, pelo menos um ponto* x = c *entre os pontos* a *e* b, *tal que a função se anule nesse ponto:*

$$f(c) = 0, \qquad a < c < b.$$

A interpretação geométrica deste teorema é muito simples. O gráfico da função contínua $y = f(x)$, reunindo os pontos $M_1[a, f(a)]$ e $M_2[b, f(b)]$ onde $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (ou $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$), corta o eixo Ox pelo menos num ponto (fig. 52).

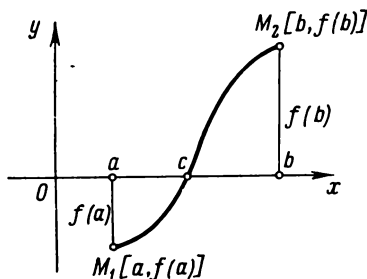
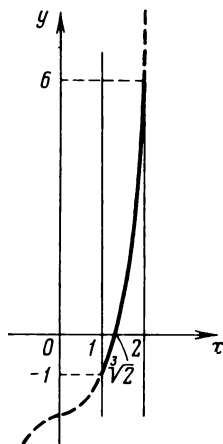



Fig. 52 Fig. 53

Exemplo — Seja a função $y = x^3 - 2$, $y_{x=1} = -1$, $y_{x=2} = 6$. Esta função é contínua sobre o segmento [1, 2]. Logo, existe pelo menos um ponto deste segmento onde a função $y = x^3 - 2$ se anula. Com efeito, $y_{x=\sqrt[3]{2}} = 0$ (fig. 53).

Teorema — 3. *Seja* y = f (x) *uma função definida e contínua sobre o segmento* [a, b]. *Se os valores desta função nas extremidades deste segmento não são iguais* f (a) = A, f (b) = B, *então, qualquer que seja o número* μ *compreendido entre os números* A *e* B, *pode-se encontrar um ponto* x = c *compreendido entre* a *e* b *tal que* f (c) = μ.

O sentido deste teorema está claramente ilustrado pela figura 54. Neste caso, toda a recta $y = \mu$ corta o gráfico da função $y = f(x)$.

Nota — Notemos que o teorema 2 não é mais do que um caso particular deste teorema, porque se A e B são de sinais diferentes pode-se tomar $\mu = 0$, visto que 0 está compreendido entre A e B.

Corolário do teorema 3 — *Se a função* $y = f(x)$ *é contínua num intervalo e se ela atinge o seu valor máximo e mínimo, então, ela toma pelo menos uma vez qualquer valor intermédio compreendido entre o mínimo e máximo valor.*

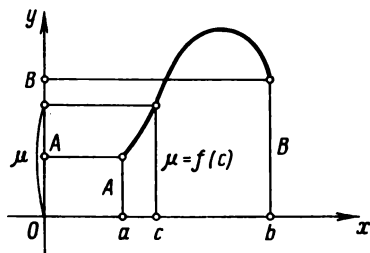



Fig. 54

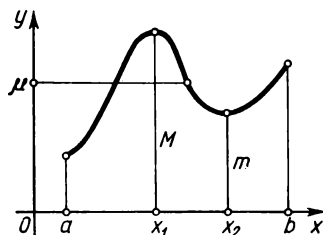



Fig. 55

Com efeito, seja $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$. Consideremos o segmento $[x_1, x_2]$. Segundo o teorema 3, a função $y = f(x)$ toma neste intervalo qualquer valor μ compreendido entre M e m. Mas o segmento $[x_1, x_2]$ encontra-se no intervalo considerado onde está definida a função $f(x)$ (fig. 55).

11. Comparação de infinitamente pequenos

Sejam

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

vários infinitamente pequenos dependendo duma mesma variável x e tendendo para zero quando x tende para um limite a ou para o infinito. Caracterizar-se-á a lei segundo a qual estas variáveis tendem para zero pelo comportamento dos seus quocientes (*).

De seguida, servir-nos-emos das seguintes definições:

Definição — 1. Se o quociente $\frac{\beta}{\alpha}$ tem um limite finito e diferente de zero, isto é, se $\lim \frac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$, e, por conseguinte, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{A} \neq 0$, então, os infinitamente pequenos α e β dizem-se *infinitamente pequenos da mesma ordem.*

Exemplo — 1. Seja $\alpha = x$, $\beta = \operatorname{sen} 2x$ em que $x \to 0$. Os infinitamente pequenos α e β são da mesma ordem, porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2.$$

(*) Suporemos que o infinitamente pequeno que figura em denominador não se anula na vizinhança do ponto a.

Exemplo — 2. Os infinitamente pequenos x, sen $3x$, tg $2x$, $7 \operatorname{Log}(1 + x)$ são todos da mesma ordem para $x \to 0$. A demonstração é idêntica à que demos para o exemplo 1.

Definição — 2. Se o quociente de dois infinitamente pequenos $\frac{\alpha}{\beta}$ tende para zero, isto é, se $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ (e, por conseguinte, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$), então, o infinitamente pequeno β diz-se *infinitamente pequeno de ordem superior em relação a* α e o infinitamente pequeno α *diz-se infinitamente pequeno de ordem superior em relação a* β.

Exemplo — 3. Seja $\alpha = x$, $\beta = x^n$, $n > 1$ para $x \to 0$. O infinitamente pequeno β é um infinitamente pequeno de ordem superior em relação a α, porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{x} = \lim_{x \to 0} x^{n-1} = 0.$$

Inversamente, o infinitamente pequeno α é um infinitamente pequeno de ordem inferior em relação a β.

Definição — 3. O infinitamente pequeno β diz-se *infinitamente pequeno de ordem* k *em relação ao infinitamente pequeno* α se β e α^k são da mesma ordem, isto é, se $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = A \neq 0$.

Exemplo — 4. Se $\alpha = x$, $\beta = x^3$, então, β é um infinitamente pequeno da terceira ordem em relação a α quando $x \to 0$, porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta}{\alpha^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{(x)^3} = 1.$$

Definição — 4. Se o quociente de dois infinitamente pequenos $\frac{\beta}{\alpha}$ tendem para a unidade, isto é, se $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, os *infinitamente pequenos* β e α dizem-se *equivalentes* e escreve-se $\alpha \sim \beta$.

Exemplo — 5. Seja $\alpha = x$ e $\beta = \operatorname{sen} x$, com $x \to 0$. Os infinitamente pequenos α e β são equivalentes, porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Exemplo — 6. Seja $\alpha = x$, $\beta = \operatorname{Log}(1 + x)$ com $x \to 0$. Os infinitamente pequenos α e β são equivalentes, porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x} = 1$$

(ver o exemplo 6 § 9).

Teorema — 1. *Se* α *e* β *são infinitamente pequenos equivalentes, a diferença* $\alpha - \beta$ *é, em relação a cada um deles, um infinitamente pequeno de ordem superior.*

Demonstração — Com efeito,

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 - \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 - 1 = 0.$$

Teorema — 2. *Se a diferença de dois infinitamente pequenos $\alpha - \beta$ é um infinitamente pequeno de ordem superior em relação a α e β, então, α e β são equivalentes.*

Demonstração — Seja $\lim \frac{\alpha-\beta}{\alpha} = 0$, então, $\lim \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$ ou $1 - \lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, ou ainda, $1 = \lim \frac{\beta}{\alpha}$, isto é, $\alpha \approx \beta$.

Se $\lim \frac{\alpha-\beta}{\beta} = 0$, então, $\lim \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) = 0$, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, isto é, $\alpha \approx \beta$.

Exemplo — 7. Seja $\alpha = x$, $\beta = x + x^3$, em que $x \to 0$. Os infinitamente pequenos α e β são equivalentes, porque a sua diferença $\beta - \alpha = x^3$ é um infinitamente pequeno de ordem superior em relação a α e a β. Com efeito,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta-\alpha}{\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0,$$

$$\lim \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+x^2} = 0.$$

Exemplo — 8. Para $x \to \infty$ os infinitamente pequenos $\alpha = \frac{x+1}{x^2}$ e $\beta = \frac{1}{x}$ são equivalentes, porque a diferença $\alpha - \beta = \frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$ é um infinitamente pequeno de ordem superior em relação a α e a β. O limite do quociente $\frac{\alpha}{\beta}$ é igual a 1:

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Nota — Se o quociente de dois infinitamente pequenos $\frac{\beta}{\alpha}$ não tem tem limite e não tende para o infinito, β e α não são comparáveis no sentido indicado.

Exemplo — 9. Seja $\alpha = x$, $\beta = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, em que $x \to 0$. Os infinitamente pequenos α e β não são comparáveis, pois que o quociente $\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ não tende nem para um limite finito nem para o infinito quando $x \to 0$ (ver exemplo 4 § 3).

Exercícios

Calcular os limites seguintes:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$. Resp. 4.

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} [2\,\text{sen}\,x - \cos x + \text{ctg}\,x]$. Resp. 2.

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{2+x}}$. Resp. 0.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)$. Resp. 2.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$. Resp. $\dfrac{4}{3}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x}$. Resp. 1.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$. Resp. $\dfrac{1}{2}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$. Resp. $\dfrac{1}{3}$.

Nota — Escrevemos a fórmula $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

$$1^3 = 1;$$
$$2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1;$$
$$3^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1;$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

Adicionando-se membro a membro estas identidades, tem-se:

$$(n+1)^3 = 3(1^2+2^2+\ldots+n^2) + 3(1+2+\ldots+n) + (n+1),$$

$$(n+1)^3 = 3(1^2+2^2+\ldots+n^2) + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + (n+1),$$

donde

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x-1}{2x+5}$. Resp. ∞.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$. Resp. 0.

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$. Resp. $\dfrac{1}{2}$.

12. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Resp. 4.

13. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$. Resp. 3.

14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. Resp. $\dfrac{1}{8}$.

15. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$ Resp. 1.

16. $\lim\limits_{y\to -2} \dfrac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}$. Resp. $-\dfrac{2}{5}$.

17. $\lim\limits_{u\to -2} \dfrac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u-3)}$. Resp. 0.

18. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$. Resp. $3x^2$.

19. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right]$. Resp. -1.

20. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$. Resp. n. (n é um inteiro positivo.)

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. Resp. $\dfrac{1}{2}$.

22. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$. Resp. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$. **Resp.** $\dfrac{q}{p}$.

24. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. **Resp.** $\dfrac{2}{3}$.

25. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$. **Resp.** $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{ma}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$. **Resp.** $\dfrac{1}{2}$.

27. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$. **Resp.** 1.

28. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. **Resp.** 1 quando $x \to +\infty$, -1 quando $x \to -\infty$.

29. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$. **Resp.** 0.

30. $\lim\limits_{x\to \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$. **Resp.** $\dfrac{1}{2}$ quando $x \to +\infty$, $-\infty$ quando $x \to -\infty$.

31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$. **Resp.** 1.

32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x}$. **Resp.** 4.

33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{3}}{x^2}$. **Resp.** $\dfrac{1}{9}$.

34. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$. **Resp.** $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$.

35. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} x$. **Resp.** 1.

36. $\lim\limits_{v\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos v}{\operatorname{sen}\left(v-\dfrac{\pi}{3}\right)}$. **Resp.** $\sqrt{3}$.

37. $\lim\limits_{z\to 1} (1-z) \operatorname{tg} \dfrac{\pi z}{2}$. **Resp.** $\dfrac{2}{\pi}$.

38. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 \operatorname{arc\,sen} x}{3x}$. **Resp.** $\dfrac{2}{3}$.

39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}(a-x)}{x}$. **Resp.** $2\cos a$.

40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$. **Resp.** $\dfrac{1}{2}$.

41. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$. **Resp.** e^2.

42. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$. **Resp.** $\dfrac{1}{e}$.

43. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$. **Resp.** $\dfrac{1}{e}$.

44. $\lim\limits_{n\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$. **Resp.** e.

45. $\lim\limits_{n\to \infty} \{n[\operatorname{Log}(n+1)-\operatorname{Log} n]\}$. **Resp.** 1.

46. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{3\sec x}$. **Resp.** e^3.

47. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Log}(1+\alpha x)}{x}$. **Resp.** α.

48. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. **Resp.** e.

49. $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\,\mathrm{tg}^2\, x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$. Resp. e^3.

50. $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\cos \frac{x}{m}\right)^m$. Resp. 1.

51. $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \frac{\mathrm{Log}\,(1+e^{\alpha})}{\alpha}$. Resp. 1 para $\alpha \to +\infty$, 0 para $\alpha \to -\infty$.

52. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\,\alpha x}{\mathrm{sen}\,\beta x}$. Resp. $\frac{\alpha}{\beta}$.

53. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x-1}{x}$ $(a>1)$. Resp. $+\infty$ para $x \to +\infty$, 0 para $x \to -\infty$.

54. $\lim\limits_{n\to\infty} n\,[a^{\frac{1}{n}}-1]$. Resp. Log a.

55. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$. Resp. $\alpha-\beta$.

56. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\mathrm{sen}\,\alpha x-\mathrm{sen}\,\beta x}$. Resp. 1.

Determinar os pontos de descontinuidade das funções:

57. $y=\frac{x-1}{x\,(x+1)\,(x^2-4)}$. Resp. Pontos de descontinuidade de segunda espécie para $x=-2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 2$.

58. $y=\mathrm{tg}\,\frac{1}{x}$. Resp. Pontos de descontinuidade de segunda espécie para $x=0$ et $x=\pm\frac{2}{\pi}\,;\ \pm\frac{2}{3\pi}\,;\ \ldots;\ \pm\frac{2}{(2n+1)\,\pi}$.

59. Determinar os pontos de descontinuidade da função $y=1+2^{\frac{1}{x}}$ e traçar o gráfico desta função. Resp. Pontos de descontinuidade de segunda espécie para $x=0$ ($y\to+\infty$ para $x\to 0+0$, $y\to 1$ para $x\to 0-0$).

60. Entre os infinitamente pequenos seguintes (quando $x\to 0$) x^2, $\sqrt{x(1-x)}$, sen $3x$, $2x\cos x\,\sqrt[3]{\mathrm{tg}^2\,x}$, xe^{2x} determinar os infinitos pequenos da mesma ordem de x assim como os infinitos pequenos de ordem superior e de ordem inferior a x. Resp. Os infinitamente pequenos da mesma ordem são sen $3x$ e xe^{2x}; os infinitamente pequenos de ordem superior são x^2 e $2x\cos x\,\sqrt[3]{\mathrm{tg}^2\,x}$, o infinitamente pequeno de ordem inferior é $\sqrt{x(1-x)}$.

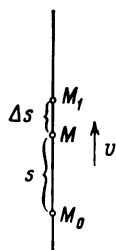
61. Entre os infinitamente pequenos seguintes (quando $x\to 0$) determinar os que são da mesma ordem que x: $2\,\mathrm{sen}\,x$, $\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,2x$, $x-3x^2$, $\sqrt{2x^2+x^3}$, $\mathrm{Log}\,(1+x)$, x^3+3x^4. Resp. $\frac{1}{2}$ tg $2x$, $x-3x^2$, Log $(1+x)$.

62. Verificar que os infinitamente pequenos $1-x$ e $1-\sqrt[3]{x}$ são da mesma ordem quando $x\to 1$. São equivalentes? Resp. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=3$, logo, estes infinitamente pequenos são da mesma ordem mas não são equivalentes.

Capítulo III

DERIVADA E DIFERENCIAL

§ 1. Velocidade dum movimento

Consideremos o movimento rectilíneo dum corpo sólido, por exemplo, o de uma pedra lançada verticalmente para o ar ou o do pistão no cilindro do motor. Abstraindo-nos da forma e das dimensões deste corpo, representá-lo-emos por um ponto material móvel M.

A distância s percorrida por este ponto material calculada a partir duma certa posição inicial M_0 depende do tempo t, isto é, uma função do tempo:

$$s = f(t). \tag{1}$$

Fig. 56

Suponhamos que ao momento t (*) o ponto móvel M se encontrava à distância s da posição inicial M_0 e que no instante $t + \Delta t$ o ponto se encontra na posição M_1, à distância $s + \Delta s$ da posição inicial (fig. 56). Assim, durante o intervalo de tempo Δt a distância s variou de Δs. Neste caso, diz-se que a grandeza s recebeu um acréscimo Δs, durante o intervalo de tempo Δt.

Consideremos o quociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$; dá-nos a velocidade média do movimento do ponto durante o intervalo de tempo Δt:

$$v_{\text{média}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$

A velocidade média não está sempre em condições de caracterizar exactamente a velocidade do movimento dum ponto M no momento t. Se, por exemplo, o movimento é tal que a velocidade do móvel, muito grande em princípio, tornando-se muito pequena em seguida, é evidente que a velocidade média não pode exprimir tais particularidades do movimento e dar-nos uma ideia certa da verdadeira velocidade do movimento no instante t. Para exprimir, duma maneira mais precisa, a verdadeira velocidade com o auxílio da velocidade média, seria necessário

(*) Aqui e no seguimento, designaremos a variável e os valores concretos que ela é susceptível de tomar para uma mesma letra.

escolher um intervalo de tempo Δt mais pequeno. O limite para o qual tende a velocidade média, quando $\Delta t \to 0$, caracteriza o melhor possível a velocidade do movimento do móvel no instante t. Este limite chama-se *velocidade instantânea do movimento:*

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (3)$$

Assim, chama-se *velocidade instantânea do movimento* ao limite do quociente do acréscimo do caminho percorrido Δs pelo acréscimo do tempo Δt, qùando o acréscimo do tempo tende para zero.

Escrevamos a igualdade (3) sob uma forma mais explícita.

Como:

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t),$$

temos:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \qquad (3')$$

Esta fórmula dá a velocidade dum movimento não uniforme. Vemos, então, que a noção de velocidade dum movimento não uniforme está infinitamente ligada à noção de limite. Só a noção de limite permite definir a velocidade de um movimento não uniforme.

Vê-se, da fórmula (3'), que v não depende do acréscimo do tempo, mas depende de t e da função $f(t)$.

Exemplo — Achar a velocidade do movimento uniformemente acelerado num instante qualquer t e no instante $t = 2s$, se a lei do movimento for

$$s = \frac{1}{2} gt^2.$$

Resolução — No instante t temos $s = \frac{1}{2} gt^2$, no instante $t + \Delta t$ teremos

$$s + \Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 = \frac{1}{2} g (t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2).$$

Calculemos Δs:

$$\Delta s = \frac{1}{2} g (t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - \frac{1}{2} gt^2 = gt\Delta t + \frac{1}{2} g\Delta t^2.$$

Formemos o quociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{gt\Delta t + \frac{1}{2} g\Delta t^2}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2} g\Delta t;$$

temos por definição:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt + \frac{1}{2} g\Delta t\right) = gt.$$

Assim, a velocidade num instante qualquer t é igual a $v = gt$. Quando $t = 2$ temos $(v)_{t=2} = g \times 2 = 9{,}8 \times 2 = 19{,}6$ m/s.

§ 2. Definição da derivada

Seja

$$y = f(x) \tag{1}$$

uma função definida num certo intervalo. Para cada valor da variável x deste intervalo a função $y = f(x)$ admite um valor bem definido.

Suponhamos que se dá à variável x um acréscimo Δx (positivo ou negativo, não importa). A função y recebe, então, um acréscimo Δy. Assim, para os valores x e $x + \Delta x$ da variável temos respectivamente $y = f(x)$ e $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

Calculemos o acréscimo Δy da função y:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{2}$$

Formemos o quociente do acréscimo da função e do acréscimo da variável independente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Calculemos o limite deste quociente quando Δx. tende para zero. Se este limite existir, chama-se derivada da função $f(x)$ e, designa-se pela notação $f'(x)$. Assim, por definição,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ou

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Chama-se, pois, *derivada da função* $y = f(x)$ em relação a x ao limite para o qual tende a razão do crescimento da função e o crescimento da variável independente quando este último tende para zero.

Notemos que geralmente para cada valor de x a derivada $f'(x)$ tem um valor determinado, isto é, que a derivada é igualmente uma função de x.

Emprega-se igualmente as seguintes notações para designar a derivada

$$y', \; y'_x, \; \frac{dy}{dx}.$$

Designa-se o valor concreto da derivada para $x = a$ pela notação $f'(a)$ ou $y'|_{x=a}$

A operação que determina a procura da derivada duma função $f(x)$ chama-se *derivação* desta função.

Exemplo — 1. Seja a função $y = x^2$.

Calcular a sua derivada y':

1) num ponto qualquer x;
2) no ponto $x = 3$.

Resolução:

1) Quando o valor da variável independente é igual a x, temos $y = x^2$. Quando o valor da variável independente é igual a $x + \Delta x$, temos $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$.

Calculemos o crescimento da função:

$$\Delta y \, (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Formemos o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Passando ao limite encontra-se a derivada da função:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Assim, a derivada da função $y = x^2$ num ponto arbitrário x é igual a:

$$y' = 2x.$$

2) Para $x = 3$ temos:

$$y'|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Exemplo — 2. $y = \frac{1}{x}$; calcular y'.

Resolução — Seguindo a via indicada no exemplo anterior temos:

$$y = \frac{1}{x}; \quad y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x};$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}.$$

Nota — Estabelecemos no parágrafo anterior que se a ligação funcional entre o caminho percorrido s por um ponto material móvel e o tempo t é dada pela fórmula

$$s = f(t),$$

a velocidade v num instante arbitrário t exprime-se pela fórmula:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Então

$$v = s'_t = f'(t),$$

isto é, que a velocidade é igual à derivada (*), em relação ao tempo t do caminho percorrido.

§ 3. Interpretação geométrica da derivada

Fomos levados à noção de derivada ao estudar a velocidade dum corpo móvel (dum ponto), isto é, partindo de considerações mecânicas. Agora vamos dar uma interpretação geométrica de derivada, não menos importante.

Para isso, é preciso, antes de tudo, definir a tangente a uma curva num dado ponto.

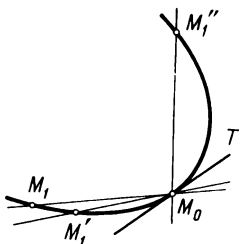
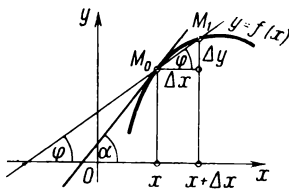



Fig. 57 Fig. 58

Dada uma curva, seja M_0 um ponto fixo desta curva. Tomemos sobre esta curva um outro ponto M_1 e tracemos a secante $M_0 M_1$ (fig. 57). Quando o ponto M_1 se aproxima indefinidamente do ponto M_0 permanecendo sobre a curva, a secante M_0M_1 ocupa diferentes posições $M_0M'_1$, $M_0M''_1$, etc.

Se, quando o ponto M_1, permanecendo sobre a curva, se aproxima indefinidamente do ponto M_0 não importa de que lado, a secante tende a ocupar uma posição limite definida pela recta M_0T, esta recta é chamada tangente à curva no ponto M_0. (Mais adiante vamos precisar o que entendemos pela expressão «tende a ocupar.)

(*) Quando dizemos «derivada em relação a x» ou «derivada em relação ao tempo t» nós subentendemos que durante o cálculo da derivada a variável independente é respectivamente x ou t, etc.

Consideremos a função $f(x)$ e a curva que lhe corresponde num sistema de coordenadas cartesianas (fig. 58)

$$y = f(x).$$

Para um dado valor de x, a função tem por valor $y = f(x)$. Aos valores x e y corresponde um ponto $M_0(x, y)$ sobre a curva.

Atribuamos à variável x um acréscimo Δx. Ao novo valor $x + \Delta x$ da variável independente corresponde um novo valor da função: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. O ponto correspondente da curva será $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Tracemos a secante $M_0 M_1$ e designemos por φ o ângulo formado por esta secante com o eixo dos x positivos. Formemos a relação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. De acordo com a figura 58 tem-se:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi. \tag{1}$$

Fig. 59

Se agora Δx tende para zero, o ponto M_1 desloca-se ao longo da curva aproximando-se indefinidamente de M_0. A secante $M_0 M_1$ move-se em volta do ponto M_0 e o ângulo φ varia com Δx.

Se para $\Delta x \to 0$ o ângulo φ tende para um limite α, a recta que passa pelo ponto M_0 e que forma um ângulo α com o eixo dos x positivos será a tangente procurada. Calcula-se fàcilmente o coeficiente angular desta tangente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

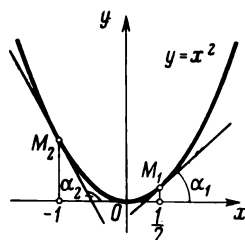
Por conseguinte,

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \tag{2}$$

isto é, que o valor da derivada $f'(x)$ *para o valor dado da variável* x *é igual à tangente do ângulo formado pelo eixo dos* x *positivos e a tangente à curva representativa da função* $y = f(x)$ *no ponto correspondente* $M_0(x, y)$.

Exemplo — Encontrar a tangente do ângulo formado pela tangente à curva $y = x^2$ nos pontos $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; M_2 $(-1, 1)$ (fig. 59).

Resolução — Temos segundo o exemplo (1) do § 2 $y' = 2x$. Por conseguinte:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = y' \big|_{x=\frac{1}{2}} = 1 ; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = y' \big|_{x=-1} = -2.$$

§ 4. Funções deriváveis

Definição — Se a função

$$y = f(x) \tag{1}$$

tem uma derivada no ponto $x = x_0$, isto é, se o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

existe, dir-se-á que a função é *derivável* para o valor $x = x_0$ ou, o que equivale ao mesmo, que ela tem uma derivada neste ponto.

Se a função tem uma derivada em cada ponto dum segmento $[a, b]$ ou dum intervalo (a, b), diz-se que ela é derivável sobre este segmento $[a, b]$ ou respectivamente neste intervalo (a, b).

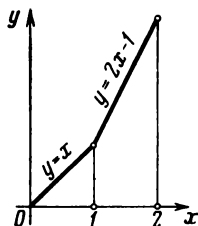



Fig. 60

Teorema — *Se a função* $y = f(x)$ *é derivável no ponto* $x = x_0$, *ela é contínua neste ponto.*

Com efeito, se

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

então,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \gamma,$$

em que γ é uma grandeza que tende para zero quando $\Delta x \to 0$. Ora,

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \gamma \Delta x;$$

donde resulta que $\Delta y \to 0$ quando $\Delta x \to 0$, o que exprime que a função $f(x)$ é contínua no ponto x_0 (ver § 9, capítulo II).

Assim, *nos pontos de descontinuidade uma função não pode ter derivada.* A proposição inversa não é verdadeira, isto é, se uma função $y = f(x)$ é contínua no ponto $x = x_0$, não resulta que ela seja derivável nesse ponto: a função $f(x)$ pode não ter derivada no ponto x_0. Para justificarmos, consideremos alguns exemplos.

Exemplo — 1. A função $f(x)$ é definida sobre o segmento [0,2] da seguinte maneira (ver fig. 60):

$$f(x) = x \quad \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$f(x) = 2x - 1 \quad \text{para} \quad 1 < x \leqslant 2.$$

Esta função não tem derivada no ponto $x = 1$, ainda que seja contínua neste ponto.

Com efeito para $\Delta x > 0$, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(1+\Delta x]-1]-[2\cdot 1-1]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$

para $\Delta x < 0$, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[1+\Delta x]-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

O limite considerado depende, pois, do sinal de Δx e, por conseguinte, a função não tem derivada no ponto $x = 1$ (*). Geomètricamente isso quer dizer que no ponto $x = 1$, esta «curva» não tem tangente definida.

A continuidade desta função no ponto $n = 1$, resulta de

$$\Delta y = \Delta x \quad \text{para} \quad \Delta x < 0,$$
$$\Delta y = 2\Delta x \quad \text{para} \quad \Delta x > 0,$$

e, por conseguinte, independente do sinal de Δx, $\Delta y \to 0$ quando $\Delta x \to 0$.

Fig. 61

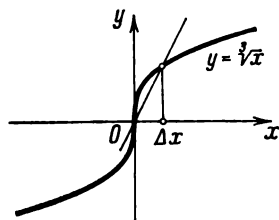
Exemplo — 2. A função $y = \sqrt[3]{n}$, cujo gráfico é dado pela figura 61, é definida e contínua para todos os valores da variável x.

Vamos ver se esta função tem derivada para $x = 0$. Para isso, calculemos o valor desta função nos pontos $x = 0$ e $x = 0 + \Delta x$; para $x = 0$, temos $y = 0$; para $x = 0 + \Delta x$ temos $y + \Delta y = \sqrt[3]{(\Delta x)}$, donde

$$\Delta y = \sqrt[3]{(\Delta x)}.$$

Procuremos o limite da razão do crescimento da função e o crescimento da variável independente

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty.$$

Assim, a razão do crescimento da função e o crescimento da variável independente para $x = 0$ tende para infinito quando $\Delta x \to 0$ (e, por conseguinte, o limite não existe). A função considerada não é, pois, derivável no ponto $x = 0$. A tangente a esta curva forma neste ponto um ângulo igual a $\frac{\pi}{2}$ com o eixo Ox, isto é, que ela coincide com o eixo Oy.

§ 5. Cálculo da derivada das funções elementares. Derivada da função $y = x^n$ para n inteiro e positivo

Para calcular a derivada duma dada função $y = f(x)$, deve-se em virtude da definição da derivada efectuar as operações seguintes:

(*) Segundo a definição de derivada, o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ deve tender para um limite determinado quando $\Delta x \to 0$ independentemente da maneira como Δx tende para zero.

1) dar um acréscimo Δx à variável x, calcular o valor correspondente da função:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

2) calcular o crescimento correspondente da função:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

3) formar a razão entre o crescimento da função e o acréscimo da variável:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

4) calcular o limite desta razão quando $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Adoptamos aqui e nos parágrafos que se seguem este processo geral de cálculo da derivada de certas funções elementares.

Teorema — *A derivada da função* $y = x^n$, *em que* n *é um número inteiro positivo, é igual a* nx^{n-1}, *isto é,*

$$\text{se } y = x^n, \qquad \text{então, } y' = nx^{n-1}. \tag{I}$$

Demonstração — Seja a função $y = x^n$.

1) Se x sofre um crescimento Δx, então,

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n.$$

2) Utilizando a fórmula do binómio de Newton temos

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \Delta x +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n$$

ou

$$\Delta y = nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

3) Calculemos o quociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1}.$$

4) Achemos o limite deste quociente:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1},$$

logo, $y' = nx^{n-1}$, como se queria demonstrar.

Exemplo — 1. $y = x^5$, $y' = 5x^{5-1} = 5x^4$.

Exemplo — 2. $y = x$, $y' = 1x^{1-1} = 1$, $y' = 1$.

Este resultado tem uma interpretação geométrica muito simples: a tangente da recta $y = x$ coincide para todos os valores de x com a própria recta e, por conseguinte, forma com o eixo dos x positivos, um ângulo de 45° cuja tangente é igual a 1.

Notemos que a fórmula (1) é igualmente válida no caso em que n é um número fraccionário ou negativo. (Isso será demonstrado no § 12.)

Exemplo — 3. $y = \sqrt{x}$.

Punhamos esta função sob a forma

$$y = x^{\frac{1}{2}},$$

então, segundo a fórmula (1) (tendo em conta a nota precedente), tem-se:

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1}$$

ou

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Exemplo — 4. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

Punhamos y sob a forma:

$$y = x^{-\frac{3}{2}}.$$

Então,

$$y' = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2} - 1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}.$$

§ 6. Derivadas das funções $y = \operatorname{sen} x$; $y = \cos x$

Teorema — 1. *A derivada do* sen x *é* cos x, *isto é*,

$$\text{se } y = \operatorname{sen} x, \text{ então } y' = \cos x \qquad \text{(II)}$$

Demonstração — Consideremos na variável x um acréscimo Δx. Então:

1) $y + \Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x)$;

2) $\Delta y = \operatorname{sen}(x+\Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\frac{x+\Delta x - x}{2} \times$

$$\times \cos\frac{x+\Delta x - x}{2} = 2 \operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

4) $$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

mas como

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$$

tem-se

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

A relação procedente é legítima pelo facto de $\cos x$ ser uma função contínua.

Teorema — 2. *A derivada do* $\cos x$ *é* $-\operatorname{sen} x$, *isto é*,

$$\text{se } y = \cos x, \text{ então, } y' = -\operatorname{sen} x \qquad \text{(III)}$$

Demonstração — Consideremos um acréscimo Δx na variável x. Então:

$$y + \Delta y = \cos(x+\Delta x);$$

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\operatorname{sen}\frac{x+\Delta x - x}{2}\times$$

$$\times\operatorname{sen}\frac{x+\Delta x + x}{2} = -2\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Tendo em consideração que sen x é uma função contínua, obtemos em definitivo:

$$y' = -\operatorname{sen} x$$

§ 7. Derivadas duma constante, dum produto duma constante por uma função, duma soma, dum produto e da divisão de duas funções

Teorema — 1. *A derivada de uma constante é igual a zero, isto é,*

$$\text{se } y = C \text{ em que } C = \text{constante, então, } y' = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Demonstração — $y = C$ é uma função de x tal que para todo o x o valor de y é igual a C.

Logo, qualquer que seja x

$$y = f(x) = C.$$

Consideremos um acréscimo Δx ($\Delta x \neq 0$) na variável x. Uma vez que a função y conserva o valor C, qualquer que seja o valor da variável independente, tem-se

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C.$$

Por conseguinte, o crescimento da função é igual a

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$$

e a razão entre o crescimento da função e o crescimento da variável independente é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Logo,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

isto é,

$$y' = 0.$$

Este resultado admite uma interpretação geométrica simples. O gráfico da função $y = C$ é uma recta paralela ao eixo Ox. A tangente a este gráfico coincide evidentemente em todos os pontos com esta recta e, por conseguinte, forma com o eixo Ox um ângulo cuja tangente y' é igual a zero.

Teorema — 2. *Pode-se separar um factor constante de debaixo do sinal de derivação, isto é,*

se $y = Cu(x)$ $(C = \text{const.})$, então, $y' = Cu'(x)$ **(V)**

Demonstração — Repetindo o raciocínio da demonstração do teorema anterior tem-se

$$y = Cu(x);$$

$$y + \Delta y = Cu(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = Cu(x + \Delta x) - Cu(x) = C[u(x + \Delta x) - u(x)],$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

isto é,

$$y' = Cu'(x).$$

Exemplo — 1. $y = 3 \frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$y' = 3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 3(x^{-\frac{1}{2}})' = 3\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}},$$

isto é,

$$y' = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}.$$

Teorema — 3. *A derivada da soma de um número finito de funções deriváveis é igual à soma das derivadas destas funções* (*).

(*) A expressão $y = u(x) - v(x)$ é equivalente a $y = u(x) + (-1)\,v(x)$ e $y' = [u(x) + (-1)\,v(x)]' = u'(x) + [-v(x)]' = u'(x) - v'(x)$.

Por exemplo, para o caso de três funções temos:

$$y = u(x) + v(x) + w(x), \qquad y' = u'(x) + v'(x) + w'(x). \qquad \text{(VI)}$$

Demonstração — Para o valor de x da variável independente

$$y = u + v + w.$$

(Omitimos a variável x na notação das funções para facilitar a escrita.)

Para o valor $x + \Delta x$ da variável independente temos:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (w + \Delta w),$$

em que Δy, Δu, Δv, Δw são respectivamente os acréscimos das funções y, u, v, w, para um acréscimo correspondente Δx da variável x. Por conseguinte,

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

ou

$$y' = u'(x) + v'(x) + w'(x).$$

Exemplo — 2. $y = 3x^4 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$,

$$y' = 3(x^4)' - (x^{-\frac{1}{3}})' = 3 \cdot 4x^3 - \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{3} - 1},$$

isto é,

$$y' = 12x^3 + \frac{1}{3} \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}.$$

Teorema — 4. *A derivada do produto de duas funções deriváveis é igual ao produto da derivada da primeira função pela segunda mais o produto da primeira função pela derivada da segunda, isto é,*

$$\text{se } y = uv, \text{ então, } y' = u'v + uv' \qquad \text{(VII)}$$

Demonstração — Seguindo o raciocínio utilizado na demonstração do teorema anterior, tem-se:

$$y = uv,$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v),$$

$$\Delta y = (u + \Delta u \qquad \Delta v) - uv = \Delta u v + u \Delta v + \Delta u \Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}v+\lim_{\Delta x\to 0}u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}=$$

$$=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)v+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

(uma vez que u e v não depende de Δx).

Consideremos o último termo do membro direito

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Sendo $u(x)$ uma função derivável, também é contínua. Então, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$. Além disso,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'\neq\infty.$$

Assim o termo considerado é igual a zero, e temos por fim:

$$y'=u'v+uv',$$

Este teorema permite obter sem dificuldade a regra de derivação do produto de um número qualquer de funções.

Assim, se considerarmos o produto de três funções

$$y=uvw,$$

pondo-o sob a forma do produto de u e de (vw), temos:

$$y'=u'(vw)+u(vw)'=u'vw+u(v'w+vw')=u'vw+uv'w+uvw'.$$

Este processo permite obter uma fórmula análoga para a derivada do produto dum número qualquer (finito) de funções. Se $y=u_1u_2\ldots,u_n$, então,

$$y'=u_1'u_2\ldots u_{n-1}u_n+u_1u_2'\ldots u_{n-1}u_n+\ldots+u_1u_2\ldots u_{n-1}u_n'.$$

Exemplo — 3. Se $y=x^2\operatorname{sen}x$, então

$$y'=(x^2)'\operatorname{sen}x+x^2(\operatorname{sen}x)'=2x\operatorname{sen}x+x^2\cos x.$$

Exemplo — 4. Se $y=\sqrt{x}\operatorname{sen}x\cos x$, então,

$$y'=(\sqrt{x})'\operatorname{sen}x\cos x+\sqrt{x}(\operatorname{sen}x)'\cos x+\sqrt{x}\operatorname{sen}x(\cos x)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}x\cos x+\sqrt{x}\cos x\cos x+\sqrt{x}\operatorname{sen}x(-\operatorname{sen}x)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}x\cos x+\sqrt{x}(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)=\frac{\operatorname{sen}2x}{4\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cos 2x.$$

Teorema — 5. *A derivada duma fracção (isto é, da divisão de duas funções) é uma fracção cujo denominador é igual ao quadrado do denominador da fracção considerada e o numerador é igual à diferença do produto do denominador pela derivada do numerador e do produto do numerador pela derivada do denominador, isto é,*

$$\text{se } y=\frac{u}{v}, \text{ então } y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}. \qquad \text{(VIII)}$$

Demonstração — Se Δy, Δu e Δv forem respectivamente os acréscimos das funções y, u, e v para o crescimento Δx da variável x, temos

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v},$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\,\Delta u-u\,\Delta v}{v\,(v+\Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{v\,\Delta u-u\,\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v+\Delta v)}=\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v+\Delta v)},$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v+\Delta v)}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}.$$

donde, tendo em conta que $\Delta v\to 0$ quando $\Delta x\to 0$ (*), temos

$$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Exemplo — 5. Se $y=\dfrac{x^3}{\cos x}$, então,

$$y'=\frac{(x^3)'\cos x-x^3(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{3x^2\cos x+x^3\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}.$$

Nota — Se a função considerada é da forma

$$y=\frac{u(x)}{C},$$

(*) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$ porque $v(x)$ é uma função derivável e, por conseguinte, contínua.

em que o denominador é uma constante, em vez de utilizar a fórmula (VIII), para calcular a derivada, é preferível utilizar-se a fórmula (V):

$$y' = \left(\frac{1}{C} u\right)' = \frac{1}{C} u' = \frac{u'}{C}.$$

Claro que este resultado pode ser igualmente obtido com a ajuda da fórmula (VIII)

Exemplo — 6. Se $y = \frac{\cos x}{7}$, então,

$$y' = \frac{(\cos x)'}{7} = -\frac{\operatorname{sen} x}{7}.$$

§ 8. Derivação duma função logarítmica

Teorema — *A derivada da função* $\log_a x$ *é igual a* $\frac{1}{x} \log_a e$, *isto é,*

$$\text{se} \quad y = \log_a x, \qquad \text{então} \quad y' = \frac{1}{x} \log_a e. \qquad \text{(IX)}$$

Demonstração — Se Δy for o crescimento da função $y = \log_a x$ para um acréscimo correspondente Δx da variável x, então:

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Multipliquemos e dividamos por x a expressão do segundo membro da última igualdade:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Designemos a quantidade $\frac{\Delta x}{x}$ por α. É evidente que $\alpha \to 0$ quando Δx tende para zero para um dado valor de x. Por conseguinte,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Ora, sabemos que (ver § 7, cap. II)

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Se a expressão que figura sob o sinal do logaritmo tende para o número e, o logaritmo desta expressão tende para $\log_a e$ (em virtude da continuidade da função logarítmica). Donde temos, finalmente:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{x} \log_a (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Considerando que $\log_a e = \frac{1}{\text{Log}\, a}$ podemos pôr a fórmula obtida sob a forma:

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\text{Log}\, a}.$$

Notemos um caso particular importante desta fórmula: se $a = e$, então, $\text{Log}\, a = \text{Log}\, e = 1$, isto é,

$$\text{se} \quad y = \text{Log}\, x, \text{ então, } y' = \frac{1}{x}. \qquad \text{(X)}$$

§ 9. Derivada duma função composta

Seja $y = f(x)$ uma função composta, isto é, que pode ser escrita sob a forma:

$$y = F(u), \qquad u = \varphi(x)$$

ou ainda $y = F[\varphi(x)]$ (ver § 8, cap. I). Na expressão $y = F(u)$, u chama-se *variável intermediária.*

Estabeleçamos a regra de derivação duma função composta.

Teorema — *Se a função* $u = \varphi(x)$ *tem uma derivada* $u'_x = \varphi'(x)$ *no ponto* x *e a função* $y = F(u)$ *tem uma derivada* $y'_u = F'(u)$ *para o valor correspondente de* u, *então, no ponto considerado* x *a função comporta* $y = F[\varphi(x)]$ *tem igualmente uma derivada igual a*

$$y'_x = F'_u(u)\, \varphi'(x)$$

onde u *deve ser substituído pela expressão* $u = \varphi(x)$. *Mais simplesmente*

$$y'_x = y'_u u'_x,$$

isto é, que a derivada duma função composta é igual ao produto da derivada desta função em relação à variável intermediária u *pela derivada em relação a* x *da variável intermediária.*

Demonstração — Para um dado valor de x teremos:

$$u = \varphi(x), \qquad y = F(u).$$

Para o novo valor $x + \Delta x$ da variável x, tem-se

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \qquad y + \Delta y = F(u + \Delta u).$$

Assim ao crescimento Δx corresponde um crescimento Δu ao qual corresponde por sua vez um crescimento Δy; além disso, quando $\Delta x \to 0$ teremos $\Delta u \to 0$ e $\Delta y \to 0$. Por hipótese,

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u.$$

Desta relação e segundo a definição de limite temos (para $\Delta u \neq 0$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha, \tag{1}$$

onde $\alpha \to 0$ quando $\Delta u \to 0$. Escrevamos a igualdade (1) sob a forma

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u. \tag{2}$$

A igualdade (2) é igualmente verificada para $\Delta u = 0$ qualquer que seja α, visto que neste caso ela se transforma em identidade $0 = 0$. Para $\Delta u = 0$ poremos $\alpha = 0$. Dividamos todos os membros da igualdade (2) por Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{3}$$

Por hipótese,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Passando ao limite na igualdade (3) quando $\Delta x \to 0$ temos:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x, \quad \text{c.q.d.} \tag{4}$$

Exemplo — 1. Seja a função $y = \operatorname{sen}(x^2)$. Calculemos y'_x. Escrevamos esta função sob a forma de função composta da seguinte maneira:

$$y = \operatorname{sen} u, \qquad u = x^2.$$

Encontramos:

$$y'_u = \cos u, \qquad u'_x = 2x.$$

Por conseguinte, segundo a fórmula (4)

$$y'_x = y'_u u'_x = \cos u \cdot 2x.$$

Substituindo u pela sua expressão em x, temos finalmente:

$$y_x = 2x \cos(x^2).$$

Exemplo — 2. Seja a função $y = (\text{Log}\, x)^3$. Calculemos y'_x. Podemos pôr esta função sob a forma:

$$y = u^3, \qquad u = \text{Log}\, x.$$

Encontramos:

$$y'_u = 3u^2, \qquad u'_x = \frac{1}{x}.$$

Por conseguinte,

$$y'_x = 3u^2 \frac{1}{x} = 3\,(\text{Log}\, x)^2 \frac{1}{x}.$$

Se a função $y = f(x)$ puder ser posta sob a forma

$$y = F(u), \qquad u = \varphi(v), \qquad v = \psi(x),$$

o cálculo da derivada y'_x pode ser efectuado aplicando sucessivamente o teorema precedente.

Em virtude da regra que acabamos de demonstrar temos:

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Aplicando este teorema para calcular u'_x temos:

$$u'_x = u'_v v'_x.$$

Substituindo a expressão de u'_x na igualdade precedente temos:

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x \tag{5}$$

ou

$$y'_x = F'_u(u)\, \varphi'_v(v)\, \psi'_x(x).$$

Exemplo — 3. Seja a função $y = \text{sen}\,[(\text{Log}\, x)^3]$. Calculemos y'_x. Ponhamos esta função sob a forma seguinte:

$$y = \text{sen}\, u, \qquad u = v^3, \qquad v = \text{Log}\, x.$$

Encontramos:

$$y'_u = \cos u, \qquad u'_v = 3v^2, \qquad v'_x = \frac{1}{x}.$$

Por conseguinte, temos em virtude da fórmula (5):

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = 3\,(\cos u)\, v^2 \frac{1}{x},$$

ou finalmente:

$$y'_x = \cos\,[(\text{Log}\, x)^3] \cdot 3\,(\text{Log}\, x)^2 \frac{1}{x}.$$

Notemos que a função considerada só é definida para $x > 0$.

§ 10. Derivadas das funções $y = \text{tg}\ x$, $y = \text{cotg}\ x$, $y = \text{Log}\,|x|$

Teorema — 1. *A derivada da função tg* x *é igual a* $\frac{1}{\cos^2 x}$, *isto é,*

$$\text{se } y = \text{tg}\, x, \text{ então, } y' = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad \textbf{(XI)}$$

Demonstração — Como

$$y = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x},$$

temos em virtude da regra de derivação das fracções [ver fórmula (VIII), § 7, cap. III]:

$$y' = \frac{(\text{sen}\, x)' \cos x - \text{sen}\, x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \text{sen}\, x\,(-\,\text{sen}\, x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Teorema — 2. *A derivada da função cotg* x *é igual a* $-\frac{1}{\text{sen}^2 x}$ isto é,

$$\text{se } y = \text{cotg}\, x, \text{ então, } y' = -\frac{1}{\text{sen}^2 x}. \qquad \textbf{(XII)}$$

Demonstração — Como

$$y = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x},$$

então,

$$y' = \frac{(\cos x)' \,\text{sen}\, x - \cos x\,(\text{sen}\, x)'}{\text{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{-\,\text{sen}\, x\, \text{sen}\, x - \cos x \cos x}{\text{sen}^2 x} = -\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = -\frac{1}{\text{sen}^2 x}.$$

Exemplo — 1. Se $y = \text{tg}\sqrt{x}$, então,

$$y' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}.$$

Exemplo — 2. Se $y = \operatorname{Log} \operatorname{cotg} x$, então,

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} (\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \left(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \right) = -\frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x} = -\frac{2}{\operatorname{sen} 2x} .$$

Teorema — 3. *A derivada da função* $\operatorname{Log} |x|$ *(fig. 62) é igual a* $\frac{1}{x}$, *isto é*

$$\text{se } y = \operatorname{Log} |x|, \text{ então, } y' = \frac{1}{x} . \qquad \text{(XIII)}$$

Demonstração — a) Se $x > 0$, então, $|x| = x$, $\operatorname{Log} |x| = \operatorname{Log} x$ e, por conseguinte,

$$y' = \frac{1}{x} .$$

b) Seja $x < 0$, então, $|x| = -x$. Mas

$$\operatorname{Log} |x| = \operatorname{Log} (-x).$$

(Notemos que se $x < 0$, então, $-x > 0$.)

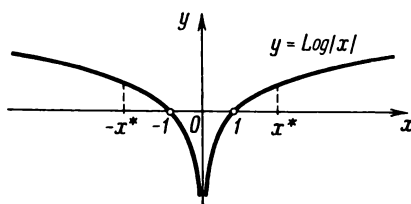



Fig. 62

Ponhamos a função $y = \operatorname{Log} (-x)$ sob a forma duma função composta pondo

$$y = \operatorname{Log} u; \qquad u = -x.$$

Então,

$$y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{u} (-1) = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x} .$$

Logo, para os valores negativos de x encontramos ainda a fórmula

$$y'_x = \frac{1}{x} .$$

Assim, a fórmula (XIII) está demonstrada para todos os valores de $x \neq 0$. (Para $x = 0$ a função $\operatorname{Log} |x|$ não é definida.)

§ 11. Função implícita e sua derivada

Suponhamos que os valores das variáveis x e y estão ligadas entre si por uma equação que designaremos simbòlicamente por

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Se a função $y = f(x)$ definida num intervalo (a, b) é tal que substituindo a equação (1) y por $f(x)$ esta equação se transforma em

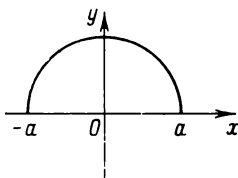
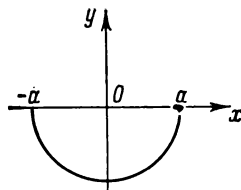



Fig. 63 Fig. 64

uma identidade em relação a x, então, a função $f(x)$ é chamada função *implícita* definida pela equação (1).

Assim, por exemplo, a equação:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \tag{2}$$

define implìcitamente as funções elementares seguintes (fig. 63 e 64):

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \tag{3}$$

$$y = -\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{4}$$

Com efeito, depois de ter substituído y por estas expressões, a equação (2) transforma-se numa identidade:

$$x^2 + (a^2 - x^2) - a^2 = 0.$$

As expressões (3) e (4) foram obtidas resolvendo a equação (2) em relação a y. Mas não é sempre possível encontrar a forma explícita duma função implícita, isto é, que não é sempre possível exprimi-la sob a forma $y = f(x)$ (*) em que $f(x)$ é uma função elementar.

Assim, as funções definidas pela equação

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

ou

$$y - x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} y = 0$$

(*) Se uma função é definida por uma equação da forma $y = f(x)$ diz-se que ela é dada sob a forma explícita, ou que é uma função explícita.

não se exprimem com o auxílio das funções elementares, isto é, que não se podem resolver em y por meio das funções elementares.

Nota — 1. Notemos que os termos *função implícita* e *função explícita* caracterizam o modo de expressão da função dada e não a natureza desta.

Toda a função explícita $y = f(x)$ pode ser posta sob a forma duma função implícita $y - f(x) = 0$.

Indiquemos agora a regra que permite encontrar a derivada duma função implícita sem a ter prèviamente posto sob a forma explícita, isto é, $y = f(x)$.

Suponhamos que a função é dada pela equação

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Se y é a função de x definida por esta equação, então, esta última transforma-se em identidade.

Derivando os dois membros desta identidade em relação a x, e supondo que y é função de x, temos (segundo a regra de derivação das funções compostas):

$$2x + 2yy' = 0,$$

donde:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Notemos que se tivessemos derivada da função explícita correspondente

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

teríamos tido

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y},$$

isto é, o mesmo resultado.

Consideremos ainda um exemplo de função implícita:

$$y^6 - y - x^2 = 0.$$

Derivemos em relação a x:

$$6y^5y' - y' - 2x = 0,$$

donde

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}.$$

Nota — 2. Os exemplos considerados mostram que para calcular o valor da derivada duma função implícita para um valor dado da variável x, é preciso conhecer igualmente y para este valor de x.

§ 12. Derivada duma função potência quando o expoente é um número real qualquer, derivada da função exponencial e da função composta exponencial

Teorema — 1. *A derivada da função* x^n, *onde* n *é um número real arbitrário, é* nx^{n-1}, *isto é,*

$$\text{se} \quad y = x^n \quad \text{então} \quad y' = nx^{n-1}. \qquad (I')$$

Demonstração — Seja $x > 0$. Tomando o logaritmo da função dada, temos:

$$\operatorname{Log} y = n \operatorname{Log} x.$$

Derivemos os dois membros da igualdade obtida (em relação a x) supondo que y é uma função de x:

$$\frac{y'}{y} = n\frac{1}{x}; \qquad y' = yn\frac{1}{x}.$$

Substituindo y pelo seu valor $y = x^n$, temos em definitivo:

$$y' = nx^{n-1}.$$

Demonstra-se fàcilmente que esta fórmula é também verdadeira para $x < 0$ se x^n tem um sentido (*).

Teorema — 2. *A derivada da função* a^x *em que* $a > 0$ *é* a^x *Log* a, *isto é,*

$$\text{se} \quad y = a^x \quad \text{então} \quad y' = a^x \operatorname{Log} a. \qquad (XIV)$$

Demonstração — Tomando o logaritmo da igualdade $y = a^x$, temos:

$$\operatorname{Log} y = x \operatorname{Log} a.$$

Derivemos a igualdade obtida supondo que é função de x:

$$\frac{1}{y}y' = \operatorname{Log} a; \qquad y' = y \operatorname{Log} a$$

ou

$$y' = a^x \operatorname{Log} a.$$

Se a base do logaritmo $a = e$, então $\operatorname{Log} e = 1$ e temos a fórmula

$$y = e^x, \qquad y' = e^x. \qquad (XIV')$$

(*) Anteriormente (§ 5, Capítulo III) demonstramos esta fórmula para o caso de n inteiro positivo. Ela está demonstrada agora para o caso geral (para todo o número n constante).

Exemplo — 1. Seja a função

$$y = e^{x^2}.$$

Escrevamo-la sob a forma duma função composta introduzindo a variável intermediária u:

$$y = e^u, \quad u = x^2;$$

então,

$$y'_u = e^u, \quad u'_x = 2x.$$

e, por conseguinte,

$$y'_x = e^u 2x = e^{x^2} 2x.$$

Chama-se *função composta exponencial* a toda a função exponencial em que a base e exponente são funções de x, por exemplo, $(\operatorname{sen} x)^{x^2}$, $x^{\operatorname{tg} x}$, x^x, $(\operatorname{Log} x)^x$, etc., e em geral toda a função da forma

$$y = [u(x)]^{v(x)} \equiv u^v$$

é uma função composta exponencial.

Teorema — 3.

Se $y = u^v$, então $y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \operatorname{Log} u$. (XV)

Demonstração — Tomemos o logaritmo da função y:

$$\operatorname{Log} y = v \operatorname{Log} u.$$

Derivando esta igualdade em relação a x, temos:

$$\frac{1}{y} y' = v \frac{1}{u} u' + v' \operatorname{Log} u,$$

donde

$$y' = y\left(v \frac{u'}{u} + v' \operatorname{Log} u\right)$$

Substituindo y pela expressão u^v temos:

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \operatorname{Log} u.$$

Assim, a derivada duma função composta exponencial compreende dois termos: obtém-se o primeiro supondo no decurso da derivação que u é uma função de x e v uma *constante* (isto é, considerando u^v como uma função *potência*); obtém-se o segundo termo supondo que v é uma função de x e u uma constante (isto é, considerando u^v como *uma função exponencial*).

Exemplo — 2. Se $y = x^x$, então,

$$y' = xx^{x-1}(x') + x^x (x') \operatorname{Log} x$$

ou

$$y' = x^x + x^x \operatorname{Log} x = x^x (1 + \operatorname{Log} x).$$

Exemplo — 3. Se $y = (\text{sen}\, x)^{x^2}$, então,

$$y' = x^2 (\text{sen}\, x)^{x^2-1} (\text{sen}\, x)' + (\text{sen}\, x)^{x^2} (x^2)' \operatorname{Log} \text{sen}\, x =$$
$$= x^2 (\text{sen}\, x)^{x^2-1} \cos x + (\text{sen}\, x)^{x^2} 2x \operatorname{Log} \text{sen}\, x.$$

O processo aplicado neste parágrafo para calcular a derivada consiste em procurarmos primeiro *a derivada do logaritmo da função dada*; este processo é frequentemente empregado para encontrar a derivada de certas funções, visto que, muitas vezes, ele simplifica os cálculos.

Exemplo — 4. Seja calcular a derivada da função

$$y = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}.$$

Resolução — Tomando o logaritmo desta expressão temos:

$$\operatorname{Log} y = 2 \operatorname{Log}(x+1) + \frac{1}{2} \operatorname{Log}(x-1) - 3 \operatorname{Log}(x+4) - x.$$

Derivando os dois membros desta igualdade, encontramos

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1.$$

Multiplicando por y e substituindo y pela expressão $\dfrac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$, temos:

$$y' = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x} \left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1 \right].$$

Nota — A expressão $\dfrac{y'}{y} = (\operatorname{Log} y)'$, a derivada do logaritmo neperiano da função dada $y = y(x)$, é chamada *derivada logarítmica*.

§ 13. Função inversa e sua derivada

Seja

$$y = f(x) \tag{1}$$

uma função crescente (fig. 65) ou decrescente definida no intervalo (a, b) $(a < b)$ (ver § 6, cap. I). Seja $f(a) = c$, $f(b) = d$.

Para fixar ideias consideremos uma função crescente.

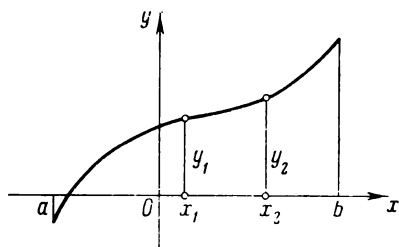
Tomemos dois valores diferentes x_1 e x_2 do intervalo (a, b). Em virtude da definição das funções crescentes, resulta que se $x_1 < x_2$ e $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, então $y_1 < y_2$. Logo, a dois valores diferentes x_1 e x_2 correspondem dois valores diferentes y_1 e y_2 da função. Inversamente, se $y_1 < y_2$ e $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, resulta da definição das funções crescentes que $x_1 < x_2$. Assim, se estabelece uma correspondência biunívoca entre os valores de x e os valores correspondentes de y.

Considerando os valores de y como os valores da variável independente e os valores de x como os valores da função, obtemos x em função de y:

$$x = \varphi(y). \tag{2}$$

Esta função é chamada função inversa da função $y = f(x)$. É evidente que a função $y = f(x)$ é a função inversa da função $x = \varphi(y)$. Demonstra-se por um raciocínio análogo que a função decrescente admite também uma função inversa.

Fig. 65

Nota — 1. Limitar-nos-emos a citar, sem a demonstrar, a proposição seguinte: se a função crescente (ou decrescente) $y = f(x)$ é contínua sobre o segmento $[a, b]$ e $f(a) = c$, $f(b) = d$, então, a função inversa é definida e contínua sobre o segmento $[c, d]$.

***Exemplo* — 1. Seja a função $y = x^3$. Esta função é crescente no intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$, ela tem uma função inversa $x = \sqrt[3]{y}$ (fig. 66).**

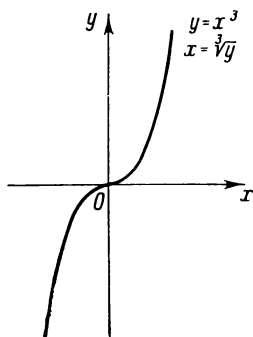
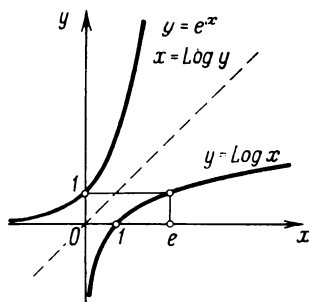



Fig. 66 Fig. 67

Notemos que se encontra a função inversa $x = \varphi(y)$ resolvendo a equação $y = f(x)$ em relação x.

***Exemplo* — 2. Seja a função $y = e^x$. Esta função é crescente no intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$. Ela admite para função inversa $x = \operatorname{Log} y$. O domínio de definição da função inversa é o intervalo $0 < y < \infty$ (fig. 67).**

Nota — 2. Se a função $y = f(x)$ não é nem crescente nem decrescente sobre um intervalo, ela pode ter várias funções inversas (*).

Exemplo — 3. A função $y = x^2$ é definida no intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$. Ela não é nem crescente nem decrescente e não admite função inversa. Mas se considerarmos o intervalo $0 \leqslant x < \infty$, vemos que esta função é crescente neste intervalo e que a sua função inversa é $x = \sqrt{y}$. No intervalo $-\infty < x < 0$ a função é decrescente e admite por função inversa a função $x = -\sqrt{y}$ (fig. 68).

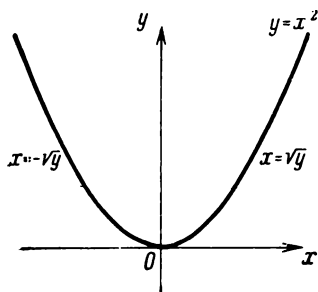



Fig. 68

Nota — 3. Se as funções $y = f(x)$ e $x = \varphi(y)$ são respectivamente inversas, o seu gráfico é uma mesma curva. Mas, se designarmos de novo a variável independente da função inversa por x e a função por y e se traçarmos o gráfico destas duas funções relativamente a um mesmo sistema de eixos de coordenadas, obteremos dois gráficos diferentes.

Vê-se fàcilmente que estes gráficos são simétricos em relação à bissectriz do primeiro quadrante.

Exemplo — 4. Sobre a figura 67 traçamos os gráficos da função $y = e^x$ (ou o de $x = \operatorname{Log} y$) e a sua função inversa $y = \operatorname{Log} x$ estudadas no exemplo 2.

Vamos demonstrar agora um teorema que permite encontrar a derivada da função $y = f(x)$ conhecendo a derivada da sua função inversa.

Teorema — *Se a função*

$$y = f(x) \tag{1}$$

admite uma função inversa

$$x = \varphi(y) \tag{2}$$

em que a derivada $\varphi'(y)$ *num ponto dado* y *é diferente de zero, então, a função* $y = f(x)$ *possui no ponto correspondente* x *uma derivada* $f'(x)$ *igual a* $\frac{1}{\varphi'(y)}$ *; isto é, que temos a fórmula:*

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}. \tag{XVI}$$

(*) Salientamos, uma vez mais, que ao dizer-se que y é uma função de x, subentende-se uma dependência unívoca entre y e x.

Assim a derivada de uma das duas funções recìprocamente inversas é igual ao inverso da derivada de outra função no ponto considerado (*).

Demonstração — Derivemos os dois membros da igualdade (2) em relação a x, supondo que y é uma função de x (**):

$$1 = \varphi'(y)\, y'_x,$$

donde

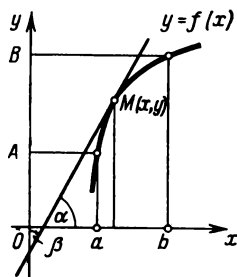
$$y'_x = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Notando-se que $y'_x = f'(x)$, obtemos a fórmula (XVI) que podemos pôr sob a forma:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Fig. 69

O resultado obtido possui uma ilustração geométrica muito simples. Consideremos o gráfico da função $y = f(x)$ (fig. 69).

Esta curva será também o gráfico da função $x = \varphi(y)$ em que x é a variável dependente e y a variável independente. Consideremos um ponto qualquer $M(x, y)$ sobre esta curva. Tracemos a tangente à curva neste ponto. Designemos respectivamente por α e β os ângulos formados por esta tangente com os eixos positivos Ox e Oy. Segundo os resultados do § 3 relativos à significação geométrica da derivada deduzimos:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{tg}\alpha, \\ \varphi'(y) &= \operatorname{tg}\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Resulta imediatamente da figura 69 que se $\alpha < \frac{\pi}{2}$, então

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

(*) Quando escrevemos $f'(x)$ ou y'_x, supomos que durante o cálculo da derivada a variável independente é x; igualmente, quando escrevemos $\varphi'(y)$ ou x'_y, supomos que durante o cálculo da derivada a variável independente é y. Notemos que *depois de ter derivado em relação a* y *devemos substituir* y *pela expressão* f (x) *do segundo membro da fórmula* (XVI).

(**) De facto, procuramos aqui a derivada da função de x dada implìcitamente pela equação $x - \varphi(y) = 0$.

Se $\alpha > \frac{\pi}{2}$, vê-se fàcilmente que $\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$. Por conseguinte, temos sempre

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha,$$

donde

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

ou

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Substituindo $\operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{tg}\beta$ pelos seus valores deduzidos da fórmula (3) obtemos

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

§ 14. Funções trigonométricas inversas e suas derivadas

1) A função $y = \operatorname{arc\,sen} x$.

Consideremos a função

$$x = \operatorname{sen} y \tag{1}$$

e tracemos o seu gráfico tomando para eixo Oy a vertical ascendente (fig. 70).

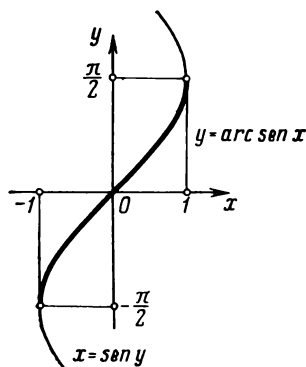



Fig. 70

Esta função é definida no intervalo infinito $-\infty < y < +\infty$. Sobre o segmento $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ a função $x = \operatorname{sen} y$ é crescente e os seus valores preenchem o segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Eis porque a função $x = \operatorname{sen} y$ tem uma função inversa que se designa por

$$y = \operatorname{arc\,sen} x \text{ (*)}.$$

Esta função é definida sobre o segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e os seus valores preenchem o segmento $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. O gráfico da função $y = \operatorname{arc\,sen} x$ é representado sobre a figura 70 por um traço a cheio.

(*) Notemos que a igualdade $y = \operatorname{Arc\,sen} x$ bem conhecida em trigonometria não é mais do que outra forma de escrever a igualdade (1). Aqui (para x dado) y designa o conjunto dos valores dos ângulos cujo seno é igual a x.

Teòrema — 1. *A derivada da função arc sen* x *é* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *isto é, se*

$$y = \text{arc sen}\, x, \text{ então, } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad \text{(XVII)}$$

Demonstração — Em virtude da igualdade (1) temos:

$$x'_y = \cos y.$$

Segundo a regra da derivação duma função inversa

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y},$$

mas

$$\cos y = \sqrt{1-\text{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2},$$

logo

$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Tomamos o sinal + antes da raíz, porque a função $y = \text{arc sen}\, x$ toma os seus valores sobre o segmento $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ e que por conseguinte $\cos y \geqslant 0$.

Exemplo — 1. $y = \text{are sen}\, e^x$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}\,(e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{(1-e^{2x})}}.$$

Exemplo — 2.

$$y = \left(\text{arc sen}\, \frac{1}{x}\right)^2,$$

$$y' = 2\, \text{arc sen}\, \frac{1}{x}\, \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \left(\frac{1}{x}\right)' = -\text{sen}\ \ 2\, \text{arc sen}\, \frac{1}{x}\, \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

2) A função $y = \text{arc cos}\, x$.
Consideremos como anteriormente a função

$$x = \cos y \qquad (2)$$

e tracemos o seu gráfico orientando o eixo Oy segundo a vertical ascendente (fig. 71). Esta função é definida no intervalo infinito $-\infty < y <$

$< +\infty$. A função $x = \cos y$ é decrescente sobre o segmento $0 \leqslant y \leqslant \pi$ e tem uma função inversa que se designa pela notação

$$y = \text{arc}\ \cos x.$$

Esta função é definida sobre o segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Os valores desta função preenchem o intervalo $\pi \geqslant y \geqslant 0$. O gráfico da função $y = \text{arc} \cos x$ está representado sobre a figura 71 em traço cheio.

Teorema — 2. *A derivada da função arc cos x é* $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *isto é,*

$$\text{se } y = \text{arc} \cos x, \text{ então, } y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad \text{(XVIII)}$$

Demonstração — Encontra-se segundo a igualdade (2):

$$x'_y = -\text{sen}\ y.$$

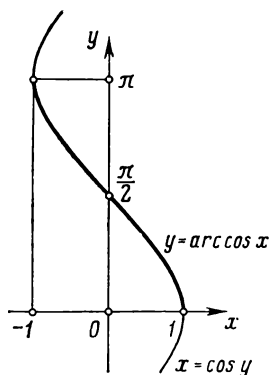
Fig. 71

Por conseguinte,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\text{sen}\ y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}.$$

Mas $\cos y = x$, donde

$$y'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Na igualdade $\text{sen}\ y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$ tomamos o sinal mais antes da raíz, porque a função $y = \text{arc} \cos x$ está definida sobre o segmento $0 \leqslant y \leqslant \pi$ e que, por conseguinte, $\text{sen}\ y \geqslant 0$.

Exemplo — 3. $y = \text{arc} \cos (\text{tg}\ x)$,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\text{tg}^2 x}} (\text{tg}\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\text{tg}^2 x}} \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3) A função $y = \text{arc tg}\ x$.
Consideremos a função

$$x = \text{tg}\ y$$

e tracemos o seu gráfico (fig. 72). Esta função é definida para todos os valores de y, excepto os valores $y = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1,$

$\pm 2, \ldots$). A função $x = \operatorname{tg} y$ é crescente no intervalo $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ e admite neste intervalo uma função inversa que se designa por

$$y = \operatorname{arc}\,\operatorname{tg} x.$$

Esta função é definida no intervalo $-\infty < x < +\infty$. Os valores da função preenchem o intervalo $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. O gráfico da função $y = \operatorname{arc}\,\operatorname{tg} x$ é representado sobre a figura 72 com traço a cheio.

Teorema — 3. *A derivada da função* arc tg x *é* $\frac{1}{1+x^2}$, *isto é* se $y = \operatorname{arc}\,\operatorname{tg} x$, então, $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

(XIX)

Demonstração — Encontra-se segundo a igualdade (3)

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Por conseguinte,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y,$$

mas

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y};$$

visto que $\operatorname{tg} y = x$, obtemos finalmente:

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

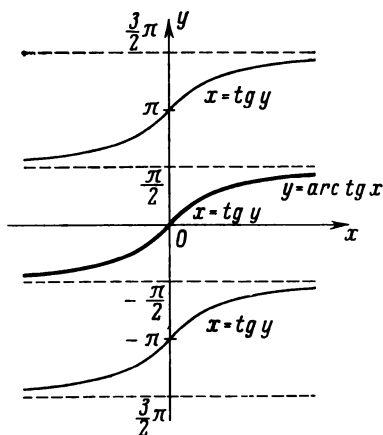
Fig. 72

Exemplo — 4. $y = (\operatorname{arc}\,\operatorname{tg} x)^4$,

$$y' = 4\,(\operatorname{arc}\,\operatorname{tg} x)^3\,(\operatorname{arc}\,\operatorname{tg} x)' = 4\,(\operatorname{arc}\,\operatorname{tg} x)^3\,\frac{1}{1+x^2}.$$

4) A função $y = \operatorname{arc}\,\operatorname{cotg} x$.
Consideremos a função

$$x = \operatorname{ctg} y. \qquad (4)$$

Esta função é definida para todos os valores de y excepto os valores $y = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). O gráfico desta função está

representado, sobre a figura 73. No intervalo $0 < y < \pi$ a função $x = \operatorname{cotg} y$ é decrescente e tem uma função inversa que designamos pela notação:

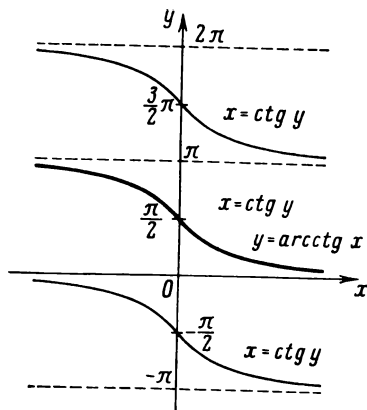



Fig. 73

$$y = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x.$$

Esta função é, pois, definida no intervalo infinito $-\infty < x < +\infty$ e os seus valores preenchem o intervalo $\pi > y > 0$.

Teorema — 4. *A derivada da função arc cotg x é* $-\frac{1}{1+x^2}$, *isto é,*

se $y = \operatorname{arc}\operatorname{cotg} x$,

$$\text{então, } y' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad \text{(XX)}$$

Demonstração — Deduz-se da igualdade (4):

$$x'_y = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 y}.$$

Por conseguinte,

$$y'_x = -\operatorname{sen}^2 y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}.$$

Mas

$$\operatorname{ctg} y = x.$$

Logo,

$$y'_x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

§ 15. Quadro das principais fórmulas de derivação

Reunamos em um quadro único as principais fórmulas e as regras de derivação que demonstramos nos parágrafos precedentes:

$$y = \text{const}, \qquad y' = 0.$$

Função potência:

$$y = x^\alpha, \qquad y' = \alpha x^{\alpha-1},$$

em particular,

$$y=\sqrt{x}, \qquad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y=\frac{1}{x}, \qquad y'=-\frac{1}{x^2}.$$

Funções trigonométricas:

$$y=\operatorname{sen} x, \qquad y'=\cos x,$$

$$y=\cos x, \qquad y'=-\operatorname{sen} x,$$

$$y=\operatorname{tg} x, \qquad y'=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y=\operatorname{ctg} x, \qquad y'=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Funções trigonométricas inversas:

$$y=\operatorname{arc\,sen} x, \qquad y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y=\operatorname{arc\,cos} x, \qquad y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y=\operatorname{arc\,tg} x, \qquad y'=\frac{1}{1+x^2},$$

$$y=\operatorname{arc\,ctg} x, \qquad y'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Função exponencial:

$$y=a^x, \qquad y'=a^x \operatorname{Log} a;$$

em particular,

$$y=e^x, \qquad y'=e^x.$$

Função logarítmica:

$$y=\log_a x, \qquad y'=\frac{1}{x}\log_a e;$$

em particular,

$$y=\operatorname{Log} x, \qquad y'=\frac{1}{x}.$$

Principais regras de derivação:

$$y = Cu(x), \qquad y' = Cu'(x) \quad (C = \text{const}),$$

$$y = u + v - w, \qquad y' = u' + v' - w',$$

$$y = u \cdot v, \qquad y' = u'v + uv',$$

$$y = \frac{u}{v}, \qquad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

$$\left.\begin{array}{l} y = f(u), \\ u = \varphi(x), \end{array}\right\} \qquad y'_x = f'_u(u)\,\varphi'_x(x),$$

$$y = u^v, \qquad y' = vu^{v-1}u' + u^v v' \operatorname{Log} u.$$

Se $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$ onde f e φ são duas funções recìprocamente inversas, então:

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad \text{onde} \quad y = f(x).$$

§ 16. Funções dadas sob a forma paramétrica

Sejam dadas duas equações:

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array}\right\} \tag{1}$$

onde t varia sobre o segmento $[T_1, T_2]$. A cada valor de t correspondem dois valores x e y (supomos que as funções φ e ψ são unívocas). Se se considera os valores de x e de y como as coordenadas dum ponto de um plano Oxy, a cada valor de t corresponderá um ponto bem determinado desse plano. Quando t varia de T_1 a T_2, este ponto descreve no plano uma curva. As equações (1) dizem-se *equações paramétricas* desta curva, onde t é chamado *parâmetro* e o processo que permite dar a curva pelas equações (1) diz-se *paramétrico.*

Suponhamos em seguida que a função $x = \varphi(t)$ admite uma função inversa $t = \Phi(x)$. É, então, evidente que y é uma função de x:

$$y = \psi[\Phi(x)]. \tag{2}$$

Assim, as equações (1) definem y em função de x e diz-se que a função y de x é dada sob a forma paramétrica.

A relação $y = f(x)$, exprimindo a dependência directa de y em função de x, obtém-se eliminando o parâmetro t nas equações (1).

As curvas dadas pelas equações paramétricas são frequentemente empregadas na mecânica. Por exemplo, se um ponto material se desloca no plano Oxy e se se conhece as leis do movimento das projecções deste ponto sobre os eixos das coordenadas,

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

onde o parâmetro t é o tempo, as equações (1') são, então, as equações paramétricas da trajectória do ponto móvel. Eliminando destas equações o parâmetro t, deduz-se a equação da trajectória sob a forma $y = f(x)$ ou $F(x, y) = 0$. Consideremos o problema seguinte.

Problema — Encontrar a trajectória e o ponto de impacto dum corpo pesado lançado dum avião deslocando-se à velocidade horizontal v_0 à altitude y_0 (pode-se desprezar a resistência do ar).

Fig. 74

Resolução — Escolhemos o sistema de coordenadas indicado sobre a figura 74 supondo que o corpo é largado do avião no próprio instante em que ele corta o eixo Oy. É evidente que a a deslocação horizontal do corpo será um movimento uniforme à velocidade *constante* v_0:

$$x = v_0 t.$$

A deslocação vertical dum corpo que cai sob o efeito da gravidade exprime-se pela fórmula:

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

Por conseguinte, a distância do corpo à terra em qualquer instante exprimir-se-á pela fórmula

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}.$$

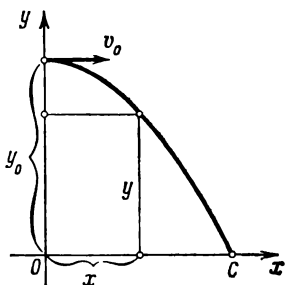
As duas equações

$$x = v_0 t,$$

$$y = y_0 - \frac{gt^2}{2}$$

serão as equações paramétricas da trajectória. Para eliminar o parâmetro tiramos o valor de t da primeira equação, e substituímos o valor $t = \frac{x}{v_0}$ na segunda equação. Então, a equação da trajectória toma a forma:

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

É a equação duma parábola cujo vértice é o ponto $M(0, y_0)$ e o eixo de simetria coincide com o eixo Oy.

Calculemos a grandeza do segmento OC. Designemos por X a abcissa do ponto C; notemos que a ordenada deste ponto é $y = 0$. Substituindo estes valores na fórmula precedente temos:

$$0 = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} X^2,$$

donde

$$X = v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}.$$

§ 17. Equações paramétricas de certas curvas

Círculo — Seja um círculo de raio r cujo centro se encontra na origem das coordenadas (fig. 75).

Designemos por t o ângulo formado pelo raio que vai ter a um ponto arbitrário $M(x, y)$ da circunferência e o eixo Ox. Pode-se, então, exprimir as

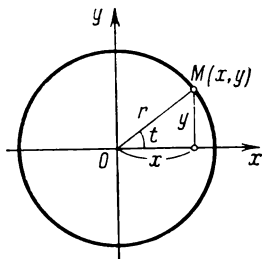
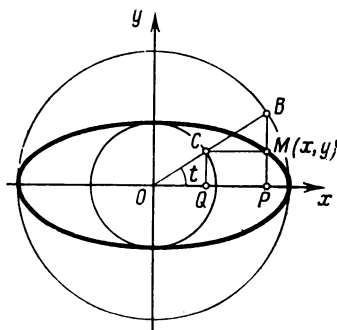



Fig. 75 Fig. 76

coordenadas dum ponto arbitrário da circunferência com o auxílio do parâmetro t da maneira seguinte:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cos t, \\ y &= r \operatorname{sen} t, \end{aligned}\right\} 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Estas são precisamente as equações paramétricas do círculo. Se eliminarmos destas equações o parâmetro t, obteremos uma equação do círculo na qual entram sòmente as variáveis x e y. Adicionando estas equações paramétricas depois de as termos prèviamente elevado ao quadrado encontramos:

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

Elipse — Seja dada a equação da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Façamos

$$x = a \cos t. \tag{2'}$$

Substituindo esta expressão na equação (1) encontramos:

$$y = b \operatorname{sen} t. \qquad (2'')$$

As equações

$$\left.\begin{array}{l} x = a \cos t, \\ y = b \operatorname{sen} t, \end{array}\right\} 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \qquad (2)$$

são as equações paramétricas da elipse.

Elucidemos o sentido geométrico do parâmetro t. Tracemos, tomando a origem como centro, dois círculos de raios a e b (fig. 76). Seja $M(x, y)$ um ponto da elipse e seja B um ponto do círculo grande tendo a mesma abcissa que M. Designemos por t o ângulo formado pelo raio OB e o eixo Ox. Resulta imediatamente da figura 76:

$$x = OP = a \cos t \text{ [é a equação (2')]}, \quad CQ = b \operatorname{sen} t.$$

Concluímos d igualdade (2'') que $CQ = y$, isto é, que a recta CM é paralela ao eixo Ox.

Por conseguinte, nas equações (2) t é o ângulo formado pelo raio OB e o eixo das abcissas. Chama-se por vezes ao ângulo t ângulo de excêntricidade.

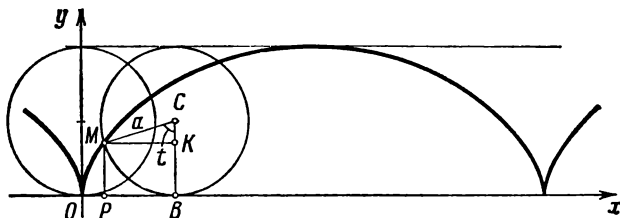



Fig. 77

Cicloide — Chama-se cicloide à curva gerada por um ponto situado sobre uma circunferência que roda, sem escorregar, sobre uma recta (fig. 77).

Suponhamos que o ponto móbil M da circunferência se encontra no começo do movimento na origem das coordenadas. Determinemos as coordenadas do ponto M depois da circunferência ter gerado um ângulo t. Designemos por a o raio desta circunferência. Vê-se da figura 77, que

$$x = OP = OB - PB,$$

mas como a circunferência roda sem escorregar

$$OB = \widehat{MB} = at, \quad PB = MK = a \sin t.$$

Por conseguinte,

$$x = at - a \operatorname{sen} t = a(t - \operatorname{sen} t).$$

Ora,

$$y = MP = KB = CB - CK = a - a \cos t = a(1 - \cos t).$$

As equações

$$\left.\begin{array}{l} x = a(t - \operatorname{sen} t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{array}\right\} 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \qquad (3)$$

são as equações paramétricas da cicloide. Quando t varia de 0 a 2π, o ponto M descreve um arco da cicloide.

Eliminemos o parâmetro t destas equações a fim de determinar a dependência directa existente entre y e x. A função $y = a\,(1 - \cos t)$ admite sobre o segmento $0 \leqslant t \leqslant \pi$ uma função inversa:

$$t = \arc\cos \frac{a-y}{a}.$$

Substituindo esta expressão de t na primeira das equações (3) encontramos:

$$x = a \arc\cos \frac{a-y}{a} - a \operatorname{sen}\left(\arc\cos \frac{a-y}{a}\right)$$

$$x = a \arc\cos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \quad \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi a.$$

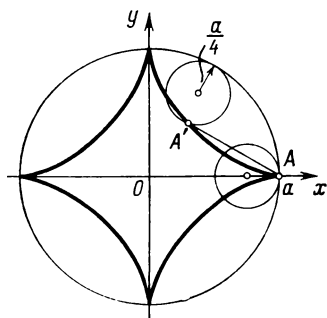
Vê-se directamente da figura 77 que para $\pi a \leqslant x \leqslant 2\pi a$

$$x = 2\pi a - \left(a \arc\cos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}\right).$$

Notemos que a função

$$x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$$

admite uma função inversa que não se exprime com o auxílio de funções elementares.

Nota — 1. O exemplo da cicloide mostra que é por vezes mais fácil estudar as funções e as curvas dadas sob a forma paramétrica que sob a forma da dependência directa y de x ou x de y.

Astroide — Chama-se astroide à curva cujas equações paramétricas são as seguintes:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos^3 t, \\ y &= a \operatorname{sen}^3 t, \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{4}$$

Elevando os dois membros destas equações à potência $\frac{2}{3}$ e adicionando-os membro a membro deduzimos a dependência directa entre y e x;

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t),$$

ou

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}. \tag{5}$$

Fig. 78

Veremos no seguimento (ver § 12, capítulo V) que esta curva tem exactamente a forma representada sobre a figura 78. Esta curva pode ser definida como a trajectória descrita por um ponto duma circunferência de raio $\frac{a}{4}$ rodando sem escorregar sobre uma outra circunferência de raio a (o pequeno círculo ficando constantemente no interior do grande) (ver fig. 78).

Nota — 2. Notemos que as equações (4) e (5) apenas definem uma só função $y = f(x)$. Elas definem duas funções contínuas sobre o segmento $-a \leqslant x \leqslant +a$. Uma delas apenas toma valores não negativos e a outra apenas valores não positivos.

§ 18. Derivada duma função dada sob a forma paramétrica

Seja uma função y de x dada pelas equações paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{array}\right\} \quad t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

Suponhamos que estas funções são deriváveis e que a função $x=\varphi(t)$ admite uma função inversa $t=\Phi(x)$ igualmente derivável. Neste caso a função $y=f(x)$ definida pelas equações paramétricas pode ser considerada como uma função composta:

$$y=\psi(t), \qquad t=\Phi(x),$$

em que t é uma variável intermediária.

Segundo a regra de derivação das funções compostas tem-se:

$$y'_x=y'_t t'_x=\psi'_t(t)\,\Phi'_x(x). \tag{2}$$

Resulta do teorema relativo à derivação das funções inversas que:

$$\Phi'_x(x)=\frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Substituindo esta expressão na fórmula (2) resulta:

$$y_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

ou

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}. \tag{XXI}$$

Esta fórmula permite calcular a derivada $y'x$ da função paramétrica, sem conhecer explicitamente a dependência entre y e x.

Exemplo — 1. A função y de x é dada pelas equações paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos t, \\ y=a\,\mathrm{sen}\, t, \end{array}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

Calcular a derivada $\frac{dy}{dx}$: 1) para t qualquer; 2) para $t=\frac{\pi}{4}$.

Resolução.

$$1)\ y'_x=\frac{(a\,\mathrm{sen}\, t)'}{(a\cos t)'}=\frac{a\cos t}{-a\,\mathrm{sen}\, t}=-\mathrm{ctg}\, t\ ;$$

$$2)\ (y'_x)_{t=\frac{\pi}{4}}=-\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4}=-1.$$

Exemplo — 2. Encontrar o coeficiente angular da tangente à cicloide

$$x = a\,(t - \text{sen}\, t),$$
$$y = a\,(1 - \cos t)$$

num ponto qualquer ($0 < t < 2\pi$).

Resolução — O coeficiente angular da tangente é igual em cada ponto ao valor da derivada y'_x neste ponto, isto é,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Mas

$$x'_t = a\,(1 - \cos t), \qquad y'_t = a\,\text{sen}\, t.$$

Por conseguinte,

$$y'_x = \frac{a\,\text{sen}\, t}{a\,(1 - \cos t)} = \frac{2\,\text{sen}\,\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\,\text{sen}^2\frac{t}{2}} = \text{ctg}\,\frac{t}{2} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right).$$

Assim, o coeficiente angular da tangente à cicloide é igual em cada ponto à $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$, em que t é o valor do parâmetro correspondente neste ponto. Mas isto significa que o ângulo α formado pela tangente e o eixo dos x é igual a $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ (para os valores de t compreendidos entre $-\pi$ e π) (*).

§ 19. Funções hiperbólicas

Nas numerosas aplicações da análise matemática encontra-se frequentemente as combinações das funções exponenciais tais como $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ e $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ Considera-se estas combinações como novas funções que se notam como se segue:

$$\left.\begin{aligned} \text{senh}\, x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(*) Com efeito, o coeficiente angular é igual à tangente do ângulo α formado pela tangente à curva e o eixo Ox. Razão porque

$$\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right)$$

e $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ para todos os valores de t tais que $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ está compreendido entre O e π.

A primeira destas funções é denominada *seno hiperbólico*, a segunda *coseno hiperbólico*. Estas duas funções permitem definir duas outras $\text{tgh} = \dfrac{\text{senh}\, x}{\cosh x}$ e $\text{cotgh}\, x = \dfrac{\cosh x}{\text{senh}\, x}$:

$$\left.\begin{aligned} \text{tgh}\, x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \textit{tangente hiperbólica} \\ \text{cotg}\, x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \textit{cotangente hiperbólica} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

É evidente que as funções $\text{senh}\, x$, $\cosh x$, $\text{tgh}\, x$ são definidas para todos os valores de x. Todavia a função $\text{cth}\, x$ é definida para todos valores excluindo o ponto $x = 0$.

Os gráficos das funções hiperbólicas estão representados nas figuras 79, 80 e 81.

Resulta da definição das funções hiperbólicas senh x e cosh x [fórmula (1)] que acabamos de dar

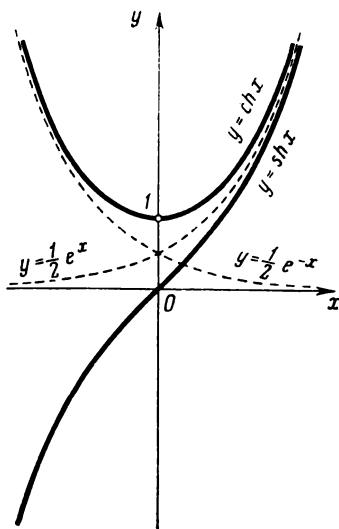



Fig. 79

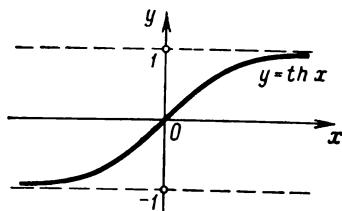



Fig. 80

identidades análogas àquelas que verificam as funções trigonométricas:

$$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1, \tag{2}$$

$$\cosh(a + b) = \cosh a \cosh b + \text{senh}\, a\, \text{senh}\, b, \tag{3}$$

$$\text{senh}(a + b) = \text{senh}\, a \cosh b + \cosh a\, \text{senh}\, b. \tag{3'}$$

Com efeito,

$$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1.$$

Notemos que

$$\cosh(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2}$$

encontramos:

$$\cosh a \cosh b + \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b = \frac{e^a + e^{-a}}{2}\,\frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2}\,\frac{e^b - e^{-b}}{2} =$$

$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a+b} + e^{a-b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}}{4} =$$

$$= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \cosh(a+b).$$

Demonstra-se duma maneira análoga a identidade (3′).

A expressão «funções hiperbólicas» é devida ao facto de as funções $\operatorname{senh} t$ e $\cosh t$ conterem nas equações paramétricas da hipérbole

$$x^2 - y^2 = 1$$

o mesmo papel que as funções $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ nas equações paramétricas do círculo

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Com efeito, eliminando o parâmetro t entre as equações

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t$$

encontra-se:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t$$

ou

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ (a equação do círculo).}$$

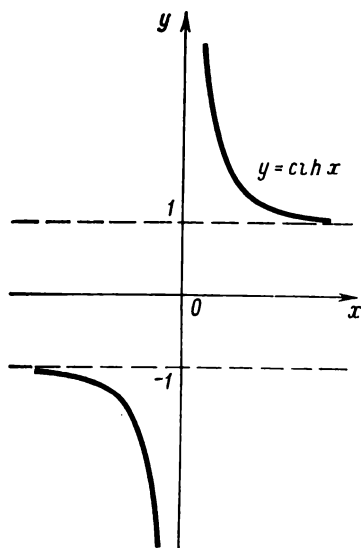
Do mesmo modo, as equações,

$$x = \cosh t, \qquad y = \operatorname{senh} t$$

Fig. 81

são as equações paramétricas da hipérbole.

Com efeito, elevando ao quadrado os dois membros destas equações e subtraindo a segunda da primeira, tem-se:

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t.$$

Visto que a expressão que figura no membro direito é igual à unidade em virtude da fórmula (2), tem-se em definitivo:

$$x^2 - y^2 = 1,$$

isto é, a equação da hipérbole.

Consideremos o círculo da equação $x^2 + y^2 = 1$ (fig. 82). Nas equações $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ o valor numérico do parâmetro t é igual ao ângulo ao centro AOM ou ao dobro da superfície S do sector AOM, visto que $t = 2S$.

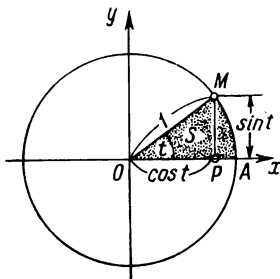
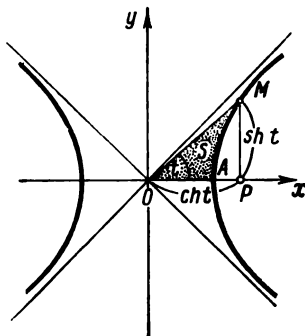



Fig. 82 Fig. 83

Indiquemos, sem o demonstrar, que o parâmetro t, que entra nas equações paramétricas da hipérbole

$$x = \cosh t, \qquad y = \operatorname{senh} t,$$

é também numèricamente igual ao dobro da área do «sector hiperbólico» AOM (fig. 83).

As derivadas das funções hiperbólicas são dadas pelas fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{senh} x)' &= \cosh x, & (\operatorname{tgh} x)' &= \frac{1}{\cosh^2 x}, \\ (\cosh x)' &= \operatorname{senh} x, & (\operatorname{coth} x)' &= -\frac{1}{\operatorname{senh}^2 x} \end{aligned}\right\} \quad \text{(XXII)}$$

que resulta directamente da definição das funções hiperbólicas; por exemplo, para a função $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ temos:

$$(\operatorname{senh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

§ 20. Diferencial

Seja $y = f(x)$ uma função derivável sobre o segmento $[a, b]$. Definiu-se a derivada desta função no ponto x do segmento $[a, b]$ pela relação:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

O quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para $\Delta x \to 0$ tende para um número determinado $f'(x)$, e, por conseguinte, difere da derivada $f'(x)$ duma quantidade infinitamente pequena:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

onde $\alpha \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Multipliquemos todos os termos desta igualdade por Δx; temos:

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha \Delta x. \tag{1}$$

Visto que em geral $f' \neq 0$, o produto $f'(x) \Delta x$ é, para x constante e Δx variável, uma quantidade infinitamente pequena da mesma ordem que Δx quando $\Delta x \to 0$. Em contrapartida, o produto $\alpha \Delta x$ é sempre uma quantidade infinitamente pequena de ordem superior em relação a Δx, visto que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Assim, o crescimento Δy da função y compõe-se de dois termos; o primeiro [para $f'(x) \neq 0$] é chamado a *parte principal* do crescimento, é uma função *linear* de Δx. Chama-se diferencial o produto $f'(x) \Delta x$ e designa-se pela notação dy ou $df(x)$.

Assim, se a função $y = f(x)$ admite uma derivada $f'(x)$ no ponto x, chama-se diferencial desta função e nota-se dy o produto da derivada $f'(x)$ neste ponto pelo crescimento da variável independente Δx:

$$dy = f'(x) \Delta x. \tag{2}$$

Calculemos o diferencial da função $y = x$. Neste caso

$$y' = (x)' = 1,$$

e, por conseguinte, $dy = dx = \Delta x$ ou $dx = \Delta x$. Assim, o *diferencial* dx *da variável independente* x *identifica-se com o seu crescimento* Δx. A igualdade $dx = \Delta x$ poderia ser tomada para definição do diferencial

da variável independente, e o exemplo precedente mostra claramente que esta definição não contradiz a definição geral do diferencial duma função. Para todos os casos a fórmula (2) pode ser posta sob a forma:

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Mas resulta desta relação que

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Por conseguinte, *a derivada* f′(x) *pode ser considerada como o quociente dos diferenciais da função e da variável independente.*

Voltemos à expressão (1) que segundo (2) pode ser transcrita como segue:

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \qquad (3)$$

Assim, o crescimento da função difere do diferencial desta função por uma quantidade infinitamente pequena de ordem superior em relação a Δx. Se $f'(x) \neq 0$, então, $\alpha\Delta x$ é também um infinitamente pequeno de ordem superior em relação a dy e

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{f'(x)\,\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1.$$

Eis porque, se usa frequentemente em certos cálculos numéricos a igualdade aproximada

$$\Delta y \approx dy, \qquad (4)$$

ou sob a forma explícita

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x, \qquad (5)$$

o que simplifica os cálculos.

Exemplo — 1. Encontrar o diferencial dy e o crescimento Δy da função $y = x^2$:

1) para os valores arbitrários de x e de Δx;
2) para $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$.

Resolução — 1) $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + \Delta x^2$,

$$dy = (x^2)'\,\Delta x = 2x\,\Delta x.$$

2) Se $x = 20$, $\Delta x = 0{,}1$, então,

$$\Delta y = 2\cdot 20\cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01,$$

$$dy = 2\cdot 20\cdot 0{,}1 = 4{,}00.$$

O erro cometido substituindo Δy por dy é igual a 0,01. Em numerosos casos pode-se avaliá-lo insignificante em relação a $\Delta y = 4{,}01$ e desprezá-lo.
O problema apresentado é ilustrado pela figura 84.

Para os cálculos numéricos utiliza-se igualmente a igualdade aproximada que resulta de (5).

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x. \tag{6}$$

Exemplo — 2. Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$, então $f'(x) = \cos x$. Neste caso a igualdade aproximada (6) torna-se:

Fig. 84

$$\operatorname{sen}(x+\Delta x) \approx \operatorname{sen} x + \cos x\,\Delta x. \tag{7}$$

Calculemos o valor aproximado de sen 46°.

Ponhamos $x = 45° = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180}$,

$$46° = 45° + 1° = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}.$$

Reportando-nos em (7) temos:

$$\operatorname{sen} 46° = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\,\frac{\pi}{180}$$

ou

$$\operatorname{sen} 46° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi}{180} =$$
$$= 0{,}7071 + 0{,}7071 \cdot 0{,}017 = 0{,}7194.$$

Exemplo — 3. Se se põe $x = 0$, $\Delta x = \alpha$ na fórmula (7), tem-se a igualdade aproximada

$$\operatorname{sen} \alpha \approx \alpha.$$

Exemplo — 4. Se $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, temos em virtude da fórmula (6) a igualdade aproximada:

$$\operatorname{tg}(x+\Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x}\,\Delta x,$$

para $x = 0$, $\Delta x = \alpha$ temos:

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha.$$

Exemplo — 5. Se $f(x) = \sqrt{x}$, resulta da fórmula (6):

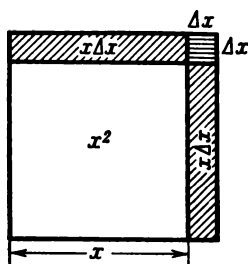
$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\Delta x.$$

Pondo $x = 1$, $\Delta x = \alpha$ tem-se a igualdade aproximada:

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha.$$

O problema do cálculo do diferencial é equivalente ao da derivada, visto que multiplicando esta última pelo diferencial da variável independente, obtém-se o diferencial da função. Eis porque a maioria dos teoremas relativos à derivada são válidos para o diferencial. Por exemplo:

O diferencial da soma de duas funções diferenciais u *e* v *é igualmente à soma dos diferenciais dessas funções:*

$$d(u+v) = du + dv.$$

O diferencial do produto de duas funções diferenciais u *e* v *é dado pela fórmula:*

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Demonstremos, por exemplo, a última fórmula. Se $y = uv$, então,

$$dy = y'\,dx = (uv' + vu')\,dx = uv'\,dx + vu'\,dx,$$

mas

$$v'\,dx = dv, \qquad u'\,dx = du,$$

donde,

$$dy = u\,dv + v\,du.$$

Duma maneira análoga se poderia demonstrar igualmente outras fórmulas, por exemplo, a do diferencial do quociente de duas funções:

$$\text{se}\quad y = \frac{u}{v}, \qquad \text{então,}\quad dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Eis alguns exemplos do cálculo do diferencial.

Exemplo — 6. $y = \operatorname{tg}^2 x, \qquad dy = 2\operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x}\,dx.$

Exemplo — 7. $y = \sqrt{1 + \operatorname{Log} x}, \qquad dy = \frac{1}{2\sqrt{1 + \operatorname{Log} x}} \cdot \frac{1}{x}\,dx.$

Determinemos o diferencial duma função composta. Seja:

$$y = f(u), \qquad u = \varphi(x) \quad \text{ou} \quad y = f[\varphi(x)].$$

Em virtude da regra de derivação das funções compostas

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u)\,\varphi'(x).$$

Por conseguinte,

$$dy = f'_u(u)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Mas $\varphi'(x)\,dx = du$, donde

$$dy = f'(u)\,du.$$

Assim, *o diferencial duma função composta exprime-se da mesma maneira como se a variável intermediária* u *fosse uma variável independente.* Por outras palavras, *o diferencial duma função* f(x) *não depende do facto de* x *ser uma variável independente ou uma função duma outra variável.* Esta importante propriedade do diferencial que consiste na *invariabilidade do diferencial* será na sequência largamente utilizada.

Exemplo — 8. Seja a função $y = \text{sen}\sqrt{x}$. Calcular dy.

Resolução — Coloquemos esta função sob a forma duma função composta:

$$y = \text{sen}\, u, \quad u = \sqrt{x},$$

encontramos:

$$dy = \cos u \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx;$$

mais $\frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = du$, donde se pode escrever

$$dy = \cos u\, du \quad \text{e} \quad dy = \cos(\sqrt{x})\, d(\sqrt{x}).$$

§ 21. Interpretação geométrica do diferencial

Consideremos a função

$$y = f(x)$$

e a curva correspondente (fig. 85).

Tomemos sobre a curva $y = f(x)$ um ponto arbitrário $M(x, y)$ e tracemos a tangente à curva neste ponto. Designemos por α o ângulo (*) que esta tangente forma com o eixo dos x positivos. Demos

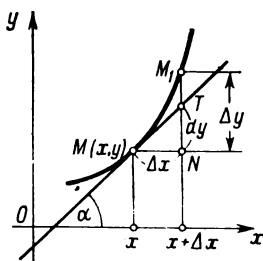



Fig. 85

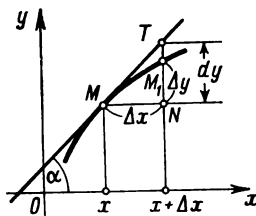



Fig. 86

à variável independente x um crescimento Δx; então, a função sofre um crescimento $\Delta y = NM_1$. Aos valores $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ corresponde sobre a curva $y = f(x)$ o ponto $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Deduz-se do triângulo MNT que

$$NT = MN \operatorname{tg} \alpha;$$

visto que

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x), \qquad MN = \Delta x,$$

(*) Supondo que a função $f(x)$ tem uma derivada finita no ponto x, tem-se $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

então,

$$NT = f'(x)\,\Delta x;$$

mas em virtude da definição do diferencial $f'(x)\,\Delta x = dy$. Assim,

$$NT = dy.$$

Esta última igualdade exprime que *o diferencial da função* f (x) *correspondente aos valores* x *e* Δx *é igual ao crescimento da ordenada da tangente à curva* y = f (x) *no ponto* x *dado.*

Resulta directamente da figura 85 que

$$M_1T = \Delta y - dy.$$

Segundo o que foi demonstrado anteriormente, temos:

$$\frac{M_1T}{NT} \to 0 \quad \text{quando} \quad \Delta x \to 0.$$

Não é preciso pensar que o crescimento Δy é sempre maior que dy. Assim, sobre a figura 86,

$$\Delta y = M_1N, \qquad dy = NT, \quad \text{mas} \quad \Delta y < dy.$$

§ 22. Derivadas de diferentes ordens

Seja $y = f(x)$ uma função derivável sobre o segmento $[a, b]$. Os valores da derivada $f'(x)$ dependem geralmente de x, por outras palavras *a derivada* f' (x) *é também uma função de* x. Derivando esta função, obtemos a derivada segunda da função $f(x)$.

A derivada da derivada primeira chama-se *derivada de segunda ordem (derivada segunda)* ou *derivada de ordem dois* da função inicial; designa-se pelo símbolo y'' ou $f''(x)$.

$$y'' = (y')' = f''(x).$$

Assim, se $y = x^5$, então,

$$y' = 5x^4; \qquad y'' = (5x^4)' = 20x^3.$$

A derivada da derivada segunda chama-se *derivada de terceira ordem (derivada terceira)* ou *derivada de ordem três*; designa-se pelo símbolo y''' ou $f'''(x)$.

Generalizando, chama-se *derivada de ordem n* da função $f(x)$ à derivada (de primeira ordem) da derivada de ordem $n - 1$; designa-se pelo símbolo $y^{(n)}$ ou $f^{(n)}(x)$:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x).$$

(A ordem da derivada é posta entre parêntesis para evitar qualquer confusão possível com o expoente ao qual esta função é elevada.)

Designa-se igualmente as derivadas de ordem quatro, cinco, etc., com ajuda dos algarismos romanos: y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, ... Neste caso, é desnecessário empregar o parêntesis. Por exemplo, se $y = x^5$, então, $y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, $y^{IV} = y^{(4)} = 120x$, $y^{V} = y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = y^{(7)} = \ldots = 0$.

Exemplo — 1. Seja dada a função $y = e^{kx}$ (k = const.). Encontrar a expressão geral da derivada de ordem n.

Resolução — $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$, ..., $y^{(n)} = k^ne^{kx}$.

Exemplo — 2. $y = \operatorname{sen} x$. Encontrar $y^{(n)}$.

Resolução.

$$y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{IV} = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Obtém-se duma maneira análoga as fórmulas que dão a derivada de ordem n de certas funções elementares. O leitor calculará fàcilmente a derivada de ordem n das funções $y = x^k$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{Log} x$.

As regras indicadas nos teoremas 2 e 3 do § 7 podem ser fàcilmente alargadas ao caso geral das derivadas de ordem n.

Em particular, encontramos as fórmulas:

$$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}, \qquad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}.$$

Vamos estabelecer a fórmula (dita fórmula de Leibniz) que permite calcular a derivada n do produto de duas funções $u(x)$ $v(x)$. Para obter esta fórmula calculamos sucessivamente as derivadas primeiras a fim de estabelecer a lei geral que dá a derivada duma ordem qualquer n:

$$y = uv,$$

$$y' = u'v + uv',$$

$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$$
$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$
$$y^{IV} = u^{IV}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{IV}.$$

Vemos que a lei de formação das derivadas é válida para as derivadas de qualquer ordem e se enuncia assim: é necessário desenvolver a expressão $(u + v)^n$ pela fórmula do binómio de Newton e substituir no desenvolvimento os expoentes de u e de v pelas ordens correspondentes das derivadas; além disso, os expoentes zero ($u^0 = v^0 = 1$) que entram na composição dos termos extremos do desenvolvimento devem ser respectivamente substituídos pelas funções u ou v (isto é, pelas «derivadas de ordem zero»):

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{(n-2)} \quad + \ldots + uv^{(n)}.$$

É precisamente a fórmula conhecida sob o nome de *fórmula de Leibniz*.

A demonstração rigorosa desta fórmula é baseada no método de indução (isto é, supondo que a fórmula é verdadeira para a ordem n, demonstra-se que ela o é ainda para a ordem $n + 1$).

Exemplo — 3. $y = e^{ax}x^2$. Calcular a derivada $y_{(n)}$.

Resolução.

$$u = e^{ax}, \qquad v = x^2,$$
$$u' = ae^{ax}, \qquad v' = 2x,$$
$$u'' = a^2e^{ax}, \qquad v'' = 2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u^n = a^ne^{ax}, \quad v''' = v^{IV} = \ldots = 0,$$
$$y^{(n} = a^ne^{ax}x^2 + na^{n-1}e^{ax}.2x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}e^{ax}.2,$$

ou

$$y^{(n)} = e^{ax}[a^nx^2 + 2na^{n-1}x + n(n-1)a^{n-2}].$$

§ 23. Diferenciais de diferentes ordens

Seja $y = f(x)$ uma função da variável independente x. O diferencial desta função

$$dy = f'(x)\,dx$$

é uma função de x, mas só o factor $f'(x)$ depende de x; o segundo factor dx é o crescimento da variável independente x e não depende

do valor de x. Visto que dy é função de x, estamos no direito de considerar o diferencial desta função.

Chama-se *diferencial segundo* ou *diferencial de ordem dois* duma função o diferencial do diferencial desta função, com a notação d^2y:

$$d(dy) = d^2y.$$

Determinemos a expressão do diferencial segundo. Em virtude da definição de diferencial temos:

$$d^2y = [f'(x)\,dx]'\,dx.$$

Visto que dx não depende de x, podemos retirar dx de debaixo do sinal da derivação e temos:

$$d^2y = f''(x)\,(dx)^2.$$

É costume omitir os parêntesis quando se anota o grau do diferencial. Assim, escreve-se dx^2 em vez de $(dx)^2$ tendo em vista o quadrado de dx; em vez de $(dx)^3$ escreve-se dx^3, etc.

Do mesmo modo, chama-se *diferencial terceiro* ou *diferencial de ordem três* o diferencial do diferencial segundo:

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x)\,dx^2]'\,dx = f'''(x)\,dx^3.$$

Generalizando, chama-se *diferencial n* ou *diferencial de ordem n* o diferencial primeiro do diferencial de ordem $(n-1)$:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = [f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}]'\,dx,$$

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n. \qquad (1)$$

Os diferenciais de diferentes ordens permitem exprimir as derivadas de qualquer ordem sob a forma do quociente dos diferenciais das ordens correspondentes:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}; \qquad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \ \ldots, \ f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}. \qquad (2)$$

É necessário anotar, todavia, que as fórmulas (1) e (2) (para $n > 1$) só são válidas no caso em que x é uma variável independente (*).

(*) Contudo, escrevemos também a igualdade (2) no caso de x não ser uma variável independente; mas neste caso devemos considerar as expressões $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., $\frac{d^ny}{dx^n}$ como uma forma simbólica de notação das derivadas correspondentes.

§ 24. Derivadas de diferentes ordens das funções implícitas e das funções dadas sob a forma paramétrica

1. Mostremos com um exemplo concreto como se deve calcular as derivadas das diferentes ordens das funções implícitas.

Suponhamos que a função implícita y de x é dada pela igualdade:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \qquad (1)$$

Derivemos em relação a x os dois membros desta igualdade, considerando y como função de x:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0;$$

donde encontramos:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}. \qquad (2)$$

Derivemos de novo esta última igualdade em relação a x (tendo em vista que y é função de x):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}.$$

Substituamos aqui a derivada $\frac{dy}{dx}$ pela sua expressão tirada da igualdade (2); temos

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y+x\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}}{y^2},$$

ou, depois da simplificação:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3}.$$

Resulta da equação (1) que

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

e a derivada segunda pode-se pôr sob a forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Derivando esta última expressão em relação a x encontramos

$$\frac{d^3y}{dx^3}, \quad \text{etc.}$$

2. Calculemos agora as derivadas de ordem superior *duma função dada sob forma paramétrica.*

Suponhamos que a função y de x é dada pelas equações paramétricas seguintes:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

em que a função $x = \varphi(t)$ admite sobre o segmento $[t_0, T]$ uma função inversa $t = \Phi(x)$.

No parágrafo 18 demonstramos que, neste caso, a derivada $\frac{dy}{dx}$ é dada pela fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \tag{4}$$

Para calcular a derivada de ordem dois, $\frac{d^2y}{dx^2}$, derivemos (4) em relação a x tendo em vista que t é uma função de x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}. \tag{5}$$

mas:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Substituindo estas últimas expressões na fórmula (5) temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Pode-se dar a esta última fórmula uma forma mais compacta:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Duma maneira análoga pode-se encontrar as derivadas

$$\frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^4y}{dx^4}, \text{ etc.}$$

Exemplo — Seja a função y de x expressa pelas equações paramétricas seguintes:

$$x = a \cos t, \qquad y = b \operatorname{sen} t.$$

Calcular as derivadas $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Resolução.

$$\frac{dx}{dt}=-a \operatorname{sen} t\,; \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t;$$

$$\frac{dy}{dt}=b\cos t\,; \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-b \operatorname{sen} t\,;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\cos t}{-a \operatorname{sen} t}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\,;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-a \operatorname{sen} t)(-b \operatorname{sen} t)-(b\cos t)(-a\cos t)}{(-a \operatorname{sen} t)^3}=-\frac{b}{a^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^3 t}.$$

§ 25. Interpretação mecânica da derivada segunda

A distância s, percorrida por um móvel animado dum movimento de translação, exprime-se em função do tempo t pela fórmula:

$$s=f(t). \tag{1}$$

Como vimos já (ver § 1, cap. III), a velocidade v dum móvel num dado instante é igual à derivada em relação ao tempo da distância percorrida:

$$v=\frac{ds}{dt}. \tag{2}$$

Suponhamos que no instante t a velocidade do móvel é igual a v. Se o movimento não é uniforme durante o intervalo de tempo Δt, contado a partir do instante t, a velocidade variará e sofrerá um crescimento de Δv.

Chama-se *aceleração média*, no intervalo de tempo Δt, o quociente do crescimento da velocidade Δv pelo crescimento do tempo Δt:

$$a_{\text{moy}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Chama-se *aceleração instantânea* o limite do quociente de crescimento da velocidade pelo crescimento do tempo, quando este último tende para zero:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

por outras palavras, a aceleração (instantânea) é igual à derivada da velocidade em relação ao tempo:

$$a = \frac{dv}{dt},$$

mas visto que $v = \frac{ds}{dt}$, então,

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2},$$

isto é, que a aceleração do movimento rectilíneo é igual à derivada segunda da distância em relação ao tempo. Encontramos a igualdade (1):

$$a = f''(t).$$

Exemplo — Determinar a velocidade v e a aceleração a dum corpo em queda livre, se o caminho percorrido s se exprimir em função do tempo t pela fórmula:

$$s = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + s_0, \qquad (3)$$

em que $g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da atracção terrestre e $s = s_{t=0}$ O valor de s no instante $t = 0$.

Resolução — Derivando (3) encontramos:

$$v = \frac{ds}{dt} = gt + v_0; \qquad (4)$$

resulta desta fórmula que $v_0 = (v)_{t=0}$.

Derivando de novo encontramos:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = g.$$

Inversamente, notemos que se a aceleração dum movimento é constante e igual a g, então a velocidade é dada pela fórmula (4), o caminho percorrido pela fórmula (3) com a condição de $(v)_{t=0} = v_0$ et $(s)_{t=0} = s_0$.

§ 26. Equações da tangente e da normal Comprimentos da sub-tangente e da sub-normal

Consideremos a curva da equação

$$y = f(x).$$

Escolhamos sobre esta curva um ponto $M(x_1, y_1)$ (fig. 87) e escrevamos a equação da tangente a esta curva no ponto M, supondo que esta tangente não é paralela ao eixo das ordenadas.

A equação da recta que passa pelo ponto M e de coeficiente angular k é da forma:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

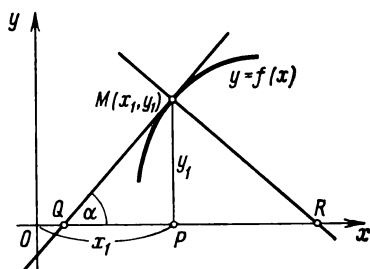
Para a tangente (ver § 3),

$$k = f'(x_1),$$

portanto, a equação da tangente é:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

Fig. 87

Muitas vezes é-se levado a considerar, além da tangente, a normal à curva num ponto dado.

Definição — Chama-se *normal* duma curva num dado ponto a recta que passa por este ponto e perpendicular à tangente neste ponto.

Resulta imediatamente desta definição que o coeficiente angular k_n da normal está ligado ao coeficiente angular k_t da tangente pela relação:

$$k_n = -\frac{1}{k_t},$$

isto é,

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

Por conseguinte, a *equação da normal* à curva $y = f(x)$ no ponto $M(x_1, y_1)$ é da forma:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1).$$

Exemplo — 1. Escrever a equação da tangente e da normal à curva $y = x^3$ ao ponto $M(1, 1)$.

Resolução — Como $y' = 3x^2$, o coeficiente angular da tangente é igual a $(y')_{x=1} = 3$.

Por conseguinte, a equação da tangente é:

$$y - 1 = 3(x - 1) \quad \text{ou} \quad y = 3x - 2.$$

A equação da normal é:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

ou

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

(ver fig. 88).

O comprimento T do segmento QM (fig. 87) da tangente compreendida entre o ponto de tangência e o eixo Ox chama-se *comprimento da tangente*.

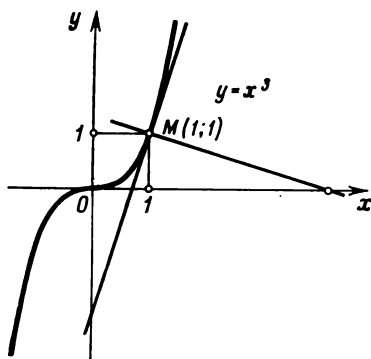
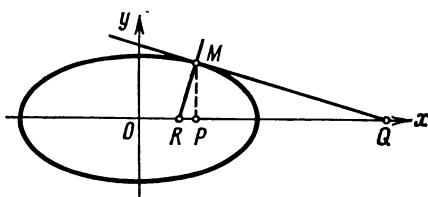



Fig. 88 Fig. 89

A projecção do segmento QM sobre o eixo Ox, isto é, o segmento QP, chama-se a *sub-tangente*. Designa-se por S_T o comprimento da sub-tangente. O comprimento N do segmento MR chama-se o *comprimento da normal* e a projecção RP deste segmento sobre o eixo Ox a *sub-normal*. Designa-se o comprimento da sub-normal por S_N.

Encontremos as expressões de T, S_T, N, S_N para uma curva $y = f(x)$ num dado ponto $M(x_1, y_1)$.

Resulta da figura 87 que:

$$QP = |y_1 \operatorname{ctg} \alpha| = \left|\frac{y_1}{\operatorname{tg} \alpha}\right| = \left|\frac{y_1}{y_1'}\right|,$$

donde:

$$S_T = \left| \frac{y_1}{y_1'} \right|,$$

$$T = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^2}{y_1'^2}} = \left| \frac{y_1}{y_1'} \sqrt{y_1'^2 + 1} \right|.$$

Desta mesma figura vem:

$$PR = | y_1 \operatorname{tg} \alpha | = | y_1 \cdot y_1' |,$$

donde:

$$S_N = | y_1 y_1' |,$$

$$N = \sqrt{y_1^2 + (y_1 y_1')^2} = | y_1 \sqrt{1 + y_1'^2} |.$$

Estas fórmulas foram estabelecidas supondo $y_1 > 0$, $y'_1 > 0$; no entanto, elas são também válidas na generalidade.

Exemplo — 2. Encontrar a equação da tangente e da normal, o comprimento da tangente e da sub-tangente, o comprimento da normal e da sub-normal da elipse:

$$x = a \cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t \tag{1}$$

no ponto $M(x_1, y_1)$ para o qual $t = \frac{\pi}{4}$ (fig. 89).

Resolução — Resulta da equação (1) que,

$$\frac{dx}{dt} = -a \operatorname{sen} t\,; \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t\,; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t\,; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$

Calculemos as cordenadas do ponto de tangência M:

$$x_1 = (x)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = (y)_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

A equação da tangente é:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

ou

$$bx + ay - ab\sqrt{2} = 0.$$

A equação da normal é:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right),$$

ou

$$(ax - by)\sqrt{2} - a^2 + b^2 = 0.$$

Os comprimentos da sub-tangente e da sub-normal são respectivamente.

$$S_T = \left| \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}} \right| = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

$$S_N = \left| \frac{b}{\sqrt{2}} \left(-\frac{b}{a} \right) \right| = \frac{b^2}{a\sqrt{2}}.$$

Os comprimentos da tangente e da normal são:

$$T = \left| \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}} \sqrt{\left(-\frac{b}{a} \right)^2 + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$N = \left| \frac{b}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(-\frac{b}{a} \right)^2} \right| = \frac{b}{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

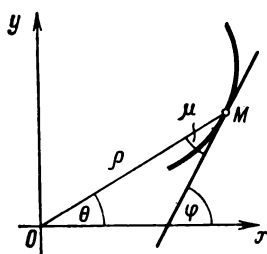
§ 27. Interpretação geométrica da derivada do raio vector em relação ao ângulo polar

Seja

$$\rho = f(\theta) \tag{1}$$

a equação duma curva em coordenadas polares. Tem-se entre as coordenadas cartesianas as relações:

Fig. 90

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta.$$

Substituindo nestas últimas fórmulas ρ pela expressão em função de θ tirada da equação (1) temos:

$$\left. \begin{aligned} x &= f(\theta) \cos\theta, \\ y &= f(\theta) \operatorname{sen} \theta. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

As equações (2) são as equações paramétricas da curva considerada; o parâmetro é aqui o ângulo polar θ (fig. 90).

Designemos por φ o ângulo formado pela tangente à curva no ponto $M(\rho, \theta)$ e o sentido positivo do eixo dos x; temos:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

ou

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta}{\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta}. \qquad (3)$$

Designemos por μ o ângulo formado pelo raio e a tangente. É evidente que $\mu = \varphi - \theta$,

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\theta}.$$

Substituamos nesta última fórmula $\operatorname{tg}\varphi$ pela expressão (3) e a seguir à transformação temos:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{(\rho'\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta)\cos\theta - (\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}{(\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + (\rho'\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta)\operatorname{sen}\theta} = \frac{\rho}{\rho'}$$

ou

$$\rho'_\theta = \rho\operatorname{ctg}\mu. \qquad (4)$$

Assim, a derivada do raio vector em relação ao ângulo polar é igual ao comprimento do raio vector multiplicado pela cotangente do ângulo formado pelo raio vector e a tangente à curva no ponto considerado.

Exemplo — Mostrar que a tangente à espiral logarítmica

$$\rho = e^{a\theta}$$

corta o raio vector sob um ângulo constante.

Resolução — Resulta da equação da espiral:

$$\rho' = ae^{a\theta}.$$

Em virtude da fórmula (4) temos:

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\rho'}{\rho} = a, \text{ isto, é, } \mu = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} a = \text{const.}$$

Exercícios

Encontrar a derivada das funções servindo-se da definição de derivada:

1. $y = x^3$. Resp. $3x^2$.

2. $y = \frac{1}{x}$. Resp. $-\frac{1}{x^2}$.

3. $y = \sqrt{x}$. Resp. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Resp. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

5. $y = \operatorname{sen}^2 x$. Resp. $2\operatorname{sen} x\cos x$.

6. $y = 2x^2 - x$. Resp. $4x - 1$.

Encontrar as tangentes dos ângulos formados pelas tangentes às curvas e ao eixo dos x *positivos:*

7. $y = x^3$. a) Para $x = 1$. Resp. 3. b) Para $x = -1$. Resp. 3; construir o gráfico.

8. $y = \frac{1}{x}$. a) Para $x = \frac{1}{2}$. Resp. -4 b) Para $x = 1$. Resp. -1; fazer o desenho.

9. $y = \sqrt{x}$ para $x = 2$. Resp. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Calcular as derivadas das funções seguintes:

10. $y = x^4 + 3x^2 - 6$. Resp. $y' = 4x^3 + 6x$.

11. $y = 6x^3 - x^2$. Resp. $y' = 18x^2 - 2x$.

12. $y = \frac{x^5}{a+b} - \frac{x^2}{a-b} - x$. Resp. $y' = \frac{5x^4}{a+b} - \frac{2x}{a-b} - 1$.

13. $y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5}$. Resp. $y' = \frac{3x^2 - 2x}{5}$.

14. $y = 2ax^3 - \frac{x^2}{b} + c$. Resp. $y' = 6ax^2 - \frac{2x}{b}$.

15. $y = 6x^{7/2} + 4x^{5/2} + 2x$. Resp. $y' = 21x^{5/2} + 10x^{3/2} + 2$.

16. $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$. Resp. $y' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$.

17. $y = \frac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$. Resp. $y' = \frac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^{5/2}}$.

18. $y = \frac{x}{m} + \frac{m}{x} + \frac{x^2}{n^2} + \frac{n^2}{x^2}$. Resp. $y' = \frac{1}{m} - \frac{m}{x^2} + \frac{2x}{n^2} - \frac{2n^2}{x^3}$.

19. $y = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 5$. Resp. $y' = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

20. $y = \frac{ax^2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{b}{x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$. Resp. $y' = \frac{5}{3}ax^{2/3} - \frac{3}{2}bx^{-5/2} + \frac{1}{6}x^{-7/6}$

21. $y = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$. Resp. $y' = 4x(1 + 3x + 10x^3)$.

22. $y = x(2x - 1)(3x + 2)$. Resp. $y' = 2(9x^2 + x - 1)$.

23. $y = (2x - 1)(x^2 - 6x + 3)$. Resp. $y' = 6x^2 - 26x + 12$.

24. $y = \frac{2x^4}{b^2 - x^2}$. Resp. $y' = \frac{4x^3(2b^2 - x^2)}{(b^2 - x^2)^2}$.

25. $y = \frac{a - x}{a + x}$. Resp. $y' = -\frac{2a}{(a+x)^2}$.

26. $f(t) = \frac{t^3}{1 + t^2}$. Resp. $f'(t) = \frac{t^2(3 + t^2)}{(1 + t^2)^2}$.

27. $f(s) = \frac{(s+4)^2}{s+3}$. Resp. $f'(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$.

28. $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$. Resp. $y' = \frac{x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x - 2)^2}$.

29. $y = \frac{x^p}{x^m - a^m}$. Resp. $y' = \frac{x^{p-1}[(p-m)x^m - pa^m]}{(x^m - a^m)^2}$.

30. $y=(2x^2-3)^2$. **Resp.** $y'=8x(2x^2-3)$.

31. $y=(x^2+a^2)^5$. **Resp.** $y=10x(x^2+a^2)^4$.

32. $y=\sqrt{x^2+a^2}$. **Resp.** $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

33. $y=(a+x)\sqrt{a-x}$. **Resp.** $y'=\dfrac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$.

34. $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. **Resp.** $y'=\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

35. $y=\dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$. **Resp.** $y'=\dfrac{1+4x^2}{x^2(1+x^2)^{3/2}}$.

36. $y=\sqrt[3]{x^2+x+1}$. **Resp.** $y'=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$.

37. $y=(1+\sqrt[3]{x})^3$. **Resp.** $y'=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$.

38. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. **Resp.** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\times$

$$\times\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right].$$

39. $y=\operatorname{sen}^2 x$. **Resp.** $y'=\operatorname{sen} 2x$.

40. $y=2\operatorname{sen} x+\cos 3x$. **Resp.** $y'=2\cos x-3\operatorname{sen} 3x$.

41. $y=\operatorname{tg}(ax+b)$. **Resp.** $y'=\dfrac{a}{\cos^2(ax+b)}$.

42. $y=\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$. **Resp.** $y'=\dfrac{1}{1+\cos x}$.

43. $y=\operatorname{sen} 2x\cdot\cos 3x$. **Resp.** $y'=2\cos 2x\cos 3x-3\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 3x$.

44. $y=\operatorname{ctg}^2 5x$. **Resp.** $y'=-10\operatorname{ctg} 5x\operatorname{cosec}^2 5x$.

45. $y=t\operatorname{sen} t+\cos t$. **Resp.** $y'=t\cos t$.

46. $y=\operatorname{sen}^3 t\cos t$. **Resp.** $y'=\operatorname{sen}^2 t\,(3\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t)$.

47. $y=a\sqrt{\cos 2x}$. **Resp.** $y'=-\dfrac{a\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

48. $r=a\operatorname{sen}^3\dfrac{\varphi}{3}$. **Resp.** $r'_{\varphi}=a\operatorname{sen}^2\dfrac{\varphi}{3}\cos\dfrac{\varphi}{3}$.

49. $y=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{x}$. **Resp.** $y'=-\dfrac{2x\cos x+\operatorname{sen}^2 x\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)}{x^2\operatorname{sen}^2 x}$.

50. $y=a\left(1-\cos^2\dfrac{x}{2}\right)^2$. **Resp.** $y'=2a\operatorname{sen}^3\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$.

51. $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$. **Resp.** $y'=\operatorname{tg} x \sec^2 x$. 52. $y=\operatorname{Log}\cos x$. **Resp.** $y'=-\operatorname{tg} x$.

53. $y=\operatorname{Log}\operatorname{tg} x$. **Resp.** $y'=\frac{2}{\operatorname{sen} 2x}$. 54. $y=\operatorname{Log}\operatorname{sen}^2 x$. **Resp.** $y'=2\operatorname{ctg} x$.

55. $y=\frac{\operatorname{tg} x-1}{\sec x}$. **Resp.** $y'=\operatorname{sen} x+\cos x$.

56. $y=\operatorname{Log}\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$. **Resp.** $y'=\frac{1}{\cos x}$.

57. $y=\operatorname{Log}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. **Resp.** $y'=\frac{1}{\cos x}$.

58. $y=\operatorname{sen}(x+a)\cos(x+a)$. **Resp.** $y'=\cos 2(x+a)$.

59. $f(x)=\operatorname{sen}(\operatorname{Log} x)$. **Resp.** $f'(x)=\frac{\cos(\operatorname{Log} x)}{x}$.

60. $f(x)=\operatorname{tg}(\operatorname{Log} x)$. **Resp.** $f'(x)=\frac{\sec^2(\operatorname{Log} x)}{x}$.

61. $f(x)=\operatorname{sen}(\cos x)$. **Resp.** $f'(x)=-\operatorname{sen} x\cos(\cos x)$.

62. $r=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\varphi-\operatorname{tg}\varphi+\varphi$. **Resp.** $\frac{dr}{d\varphi}=\operatorname{tg}^4\varphi$.

63. $f(x)=(x\operatorname{ctg} x)^2$. **Resp.** $f'(x)=2x\operatorname{ctg} x(\operatorname{ctg} x-x\operatorname{cosec}^2 x)$.

64. $y=\operatorname{Log}(ax+b)$. **Resp.** $y'=\frac{a}{ax+b}$.

65. $y=\log_a(x^2+1)$. **Resp.** $y'=\frac{2x}{(x^2+1)\operatorname{Log} a}$.

66. $y=\operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x}$. **Resp.** $y'=\frac{2}{1-x^2}$.

67. $y=\log_3(x^2-\operatorname{sen} x)$. **Resp.** $y'=\frac{2x-\cos x}{(x^2-\operatorname{sen} x)\operatorname{Log} 3}$.

68. $y=\operatorname{Log}\frac{1+x^2}{1-x^2}$. **Resp.** $y'=\frac{4x}{1-x^4}$.

69. $y=\operatorname{Log}(x^2+x)$. **Resp.** $y'=\frac{2x+1}{x^2+x}$.

70. $y=\operatorname{Log}(x^3-2x+5)$. **Resp.** $y'=\frac{3x^2-2}{x^3-2x+5}$.

71. $y=x\operatorname{Log} x$. **Resp.** $y'=\operatorname{Log} x+1$. 72. $y=\operatorname{Log}^3 x$. **Resp.** $y'=\frac{3\operatorname{Log}^2 x}{x}$.

73. $y=\operatorname{Log}(x+\sqrt{1+x^2})$. **Resp.** $y'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

74. $y=\operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)$. **Resp.** $y'=\frac{1}{x\operatorname{Log} x}$.

75. $f(x)=\operatorname{Log}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. **Resp.** $f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

76. $f(x)=\operatorname{Log}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$. Resp. $f'(x)=-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$.

77. $y=\sqrt{a^2+x^2}-a\operatorname{Log}\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. Resp. $y'=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$.

78. $y=\operatorname{Log}(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$. Resp. $y'=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$.

79. $y=-\frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}+\frac{1}{2}\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Resp. $y'=\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}$.

80. $y=\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x}$. Resp. $y'=\frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{2\cos^3 x}$.

81. $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{Log}\cos x$. Resp. $y'=\operatorname{tg}^3 x$.

82. $y=e^{ax}$. Resp. $y'=ae^{ax}$.

83. $y=e^{4x+5}$. Resp. $y'=4e^{4x+5}$.

84. $y=a^{x^2}$. Resp. $2xa^{x^2}\operatorname{Log} a$.

85. $y=7^{x^2+2x}$. Resp. $y'=2(x+1)\,7^{x^2+2x}\operatorname{Log} 7$.

86. $y=c^{a^2-x^2}$. Resp. $y'=-2xc^{a^2-x^2}\operatorname{Log} c$.

87. $y=ae^{\sqrt{x}}$. Resp. $y'=\frac{a}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$.

88. $r=a^{\theta}$. Resp. $r'=a^{\theta}\operatorname{Log} a$.

89. $r=a^{\operatorname{Log}\theta}$. Resp. $\frac{dr}{d\theta}\frac{a^{\operatorname{Log}\theta}\operatorname{Log} a}{\theta}$.

90. $y=e^x(1-x^2)$. Resp. $y'=e^x(1-2x-x^2)$.

91. $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$. Resp. $y'=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

92. $y=\operatorname{Log}\frac{e^x}{1+e^x}$. Resp. $y'=\frac{1}{1+e^x}$.

93. $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$. Resp. $y'=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$.

94. $y=e^{\operatorname{sen} x}$. Resp. $y'=e^{\operatorname{sen} x}\cos x$.

95. $y=a^{\operatorname{tg} nx}$. Resp. $y'=na^{\operatorname{tg} nx}\sec^2 nx\operatorname{Log} a$.

96. $y=e^{\cos x}\operatorname{sen} x$. Resp. $y'=e^{\cos x}(\cos x-\operatorname{sen}^2 x)$.

97. $y=e^x\operatorname{Log}\operatorname{sen} x$. Resp. $y'=e^x(\operatorname{ctg} x+\operatorname{Log}\operatorname{sen} x)$.

98. $y=x^n e^{\operatorname{sen} x}$. Resp. $y'=x^{n-1}e^{\operatorname{sen} x}(n+x\cos x)$.

99. $y=x^x$. Resp. $y'=x^x(\operatorname{Log} x+1)$.

100. $y=x^{\frac{1}{x}}$. Resp. $y'=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\operatorname{Log} x}{x^2}\right)$

101. $y=x^{\operatorname{Log} x}$. Resp. $y'=x^{\operatorname{Log} x-1}\operatorname{Log} x^2$.

102. $y=e^{x^x}$ Resp. $y'=e^{x^x}(1+\operatorname{Log} x)\,x^x$.

103. $y=\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$. Resp. $y'=n\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}\left(1+\operatorname{Log}\frac{x}{n}\right)$.

104. $y=x^{\operatorname{sen} x}$. Resp. $x^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}+\operatorname{Log} x \cos x\right)$.

105. $y=(\operatorname{sen} x)^{x}$. Resp. $(\operatorname{sen} x)^{x}(\operatorname{Log} \operatorname{sen} x+x \operatorname{ctg} x)$.

106. $y=(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$. Resp. $y'=(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}(1+\sec^2 x \operatorname{Log} \operatorname{sen} x)$.

107. $y=\operatorname{tg}\frac{1-e^x}{1+e^x}$. Resp. $y'=-\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1-e^x}{1+e^x}}$.

108. $y=\operatorname{sen}\sqrt{1-2^x}$. Resp. $y'=-\frac{\cos\sqrt{1-2^x}}{2\sqrt{1-2^x}}\,2^x \operatorname{Log} 2$.

109. $y=10^{x \operatorname{tg} x}$. Resp. $y'=10^{x \operatorname{tg} x}\operatorname{Log} 10\left(\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}\right)$.

Calcular a derivada das funções depois de as ter logaritmizado:

110. $y=\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$. Resp. $y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x-1}\right)$.

111. $y=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$. Resp. $y'=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\times$
$\times\left(\frac{3}{x+1}+\frac{3}{4(x-2)}-\frac{2}{5(x-3)}\right)$.

112. $y=\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$. Resp. $y'=-\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$.

113. $y=\frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3}\sqrt[3]{(x-3)^7}}$. Resp. $y'=\frac{-161x^2+480x-271}{60\sqrt[5]{(x-1)^3}\sqrt[4]{(x-2)^7}\sqrt[3]{(x-3)^{10}}}$.

114. $y=\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. Resp. $y'=\frac{1+3x^2-2x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

115. $y=x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$. Resp. $y'=5x^4(a+3x)^2(a-2x)(a^2+2ax-12x^2)$.

116. $y=\operatorname{arc} \operatorname{sen}\frac{x}{a}$. Resp. $y'=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

117. $y=(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)^2$. Resp. $y'=\frac{2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x^2}}$.

118. $y=\operatorname{arc} \operatorname{tg}(x^2+1)$. Resp. $y'=\frac{2x}{1+(x^2+1)^2}$.

119. $y=\operatorname{arc} \operatorname{tg}\frac{2x}{1-x^2}$. Resp. $y'=\frac{2}{1+x^2}$.

120. $y=\operatorname{arc} \cos(x^2)$. Resp. $y'=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

121. $y=\frac{\operatorname{arc} \cos x}{x}$. Resp. $y'=\frac{-(x+\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc} \cos x)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

122. $y = \text{arc sen}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}$. Resp. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

123. $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\text{arc sen}\,\frac{x}{a}$. Resp. $y' = 2\sqrt{a^2-x^2}$.

124. $y = \sqrt{a^2-x^2} + a\,\text{arc sen}\,\frac{x}{a}$. Resp. $y' = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

125. $u = \text{arc tg}\,\frac{v+a}{1-av}$. Resp. $\frac{du}{dv} = \frac{1}{1+v^2}$.

126. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$. Resp. $y' = \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$.

127. $y = x\,\text{arc sen}\,x$. Resp. $y' = \text{arc sen}\,x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

128. $f(x) = \text{arc cos}\,(\text{Log}\,x)$. Resp. $f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-\text{Log}^2 x}}$.

129. $f(x) = \text{arc sen}\,\sqrt{\text{sen}\,x}$. Resp. $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen}\,x - \text{sen}^2 x}}$.

130. $y = \text{arc tg}\,\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ $(0 \leqslant x < \pi)$. Resp. $y' = \frac{1}{2}$.

131. $y = e^{\text{arc tg}\,x}$. Resp. $y' = \frac{e^{\text{arc tg}\,x}}{1+x^2}$.

132. $y = \text{arc tg}\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Resp. $y' = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$.

133. $y = x^{\text{arc sen}\,x}$. Resp. $y' = x^{\text{arc sen}\,x}\left(\frac{\text{arc sen}\,x}{x} + \frac{\text{Log}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

134. $y = \text{arc sen}\,(\text{sen}\,x)$. Resp. $y' = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} + \text{ no } 1.^\circ \text{ e } 4.^\circ \text{ quadrante.} \\ - \text{ no } 2.^\circ \text{ e } 3.^\circ \text{ quadrante.} \end{cases}$

135. $y = \text{arc tg}\,\frac{4\,\text{sen}\,x}{3+5\cos x}$. Resp. $y' = \frac{4}{5+3\cos x}$.

136. $y = \text{arc tg}\,\frac{a}{x} + \text{Log}\,\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$. Resp. $y' = \frac{2a^3}{x^4-a^4}$.

137. $y = \text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,x$. Resp. $y' = \frac{x^2}{1-x^4}$.

138. $y = \frac{3x^2-1}{3x^3} + \text{Log}\,\sqrt{1+x^2} + \text{arc tg}\,x$ Resp. $y' = \frac{x^5+1}{x^6+x^4}$.

139. $y = \frac{1}{3}\,\text{Log}\,\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. Resp. $y' = \frac{1}{x^3+1}$.

140. $y = \text{Log}\,\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2\,\text{arc tg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. Resp. $y' = \frac{4\sqrt{2}}{1+x^4}$.

141. $y = \text{arc cos}\,\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$. Resp. $-\frac{2n\,|x|^n}{x\,(x^{2n}+1)}$.

Derivação das funções implicitas:

Calcular $\frac{dy}{dx}$, se :

142. $y^2=4px$. Resp. $\frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y}$.

143. $x^2+y^2=a^2$. Resp. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.

144. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Resp. $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$.

145. $y^3-3y+2ax=0$. Resp. $\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{3(1-y^2)}$.

146. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$. Resp. $\frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{y}{x}}$.

147. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. Resp. $\frac{dy}{dx}=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

148. $y^2-2xy+b^2=0$. Resp. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-x}$.

149. $x^3+y^3-3axy=0$. Resp. $\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

150. $y=\cos(x+y)$. Resp. $\frac{dy}{dx}=-\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{1+\operatorname{sen}(x+y)}$.

151. $\cos(xy)=x$. Resp. $\frac{dy}{dx}=-\frac{1+y\operatorname{sen}(xy)}{x\operatorname{sen}(xy)}$.

Achar $\frac{dy}{dx}$ para as funções dadas sob a forma paramétrica:

152. $x=a\cos t$, $y=b\operatorname{sen} t$. Resp. $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$.

153. $x=a(t-\operatorname{sen} t)$; $y=a(1-\cos t)$. Resp. $\frac{dy}{dx}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$.

154. $x=a\cos^3 t$; $y=b\operatorname{sen}^3 t$. Resp. $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{tg} t$.

155. $x=\frac{3at}{1+t^2}$; $y=\frac{3at^2}{1+t^2}$. Resp. $\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{1-t^2}$.

156. $u=2\operatorname{Log}\operatorname{ctg} s$, $v=\operatorname{tg} s+\operatorname{ctg} s$. Mostrar que $\frac{du}{dv}=\operatorname{tg} 2s$.

Achar as tangentes dos ângulos da inclinação das tangentes às curvas:

157. $x=\cos t$, $y=\operatorname{sen} t$ no ponto $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Fazer o desenho

Resp. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

158. $x=2\cos t$, $y=\operatorname{sen} t$ no ponto $x=1$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Fazer o desenho

Resp. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

159. $x=a(t-\text{sen}\, t)$, $y=a(1-\cos t)$ para $t=\frac{\pi}{2}$. Fazer o desenho. Resp 1.

160. $x=a\cos^3 t$, $y=a\,\text{sen}^3 t$ para $t=\frac{\pi}{4}$. Fazer o desenho. Resp -1.

161. Um corpo lançado no vácuo sob um ângulo α com o horizonte descreve sob o efeito da gravidade uma trajectória (parábola) cujas equações paramétricas são: $x=(v_0\cos\alpha)t$, $y=(v_0\,\text{sen}\,\alpha)\,t-\frac{gt^2}{2}$ ($g = 9{,}8$ m/s²). Para $\alpha = 60°$, $v_0 = 50$ m/s, determinar a direcção do movimento nos instantes:

1) $t = 2$s; 2) $t = 7$s. Fazer o desenho.

Rép. 1) $\text{tg}\,\varphi_1 = 0{,}948$, $\varphi_1 = 43°30'$

2) $\text{tg}\,\varphi_2 = -1{,}012$, $\varphi_2 = +134°7'$

Calcular os diferenciais das funções seguintes:

162. $y=(a^2-x^2)^5$. Resp. $dy=-10x(a^2-x^2)^4\,dx$.

163. $y=\sqrt{1+x^2}$. Resp. $dy=\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

164. $y=\frac{1}{3}\text{tg}^3 x+\text{tg}\,x$. Resp. $dy=\sec^4 x\,dx$.

165. $y=\frac{x\,\text{Log}\,x}{1-x}+\text{Log}\,(1-x)$. Resp. $dy=\frac{\text{Log}\,x\,dx}{(1-x)^2}$.

Calcular os acréscimos e os diferenciais das funções:

166. $y = 2x^2 - x$ para $x = 1$, $\Delta x = 0{,}01$. Rép. $\Delta y = 0{,}0302$, $dy = 0{,}03$.

167. Seja $y = x^3 + 2x$. Calcular Δy e dy para $x = -1$, $\Delta x = 0{,}002$. Resp. $\Delta y = 0{,}098808$, $dy = 0{,}1$.

168. Seja $y = \text{sen}\,x$. Calcular dy para $x = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = \frac{\pi}{18}$ Resp. $dy = \frac{\pi}{36} = 0{,}00873$.

169. Conhecendo $\text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866025$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$, calcular o valor aproximado de sen 60° 3′ e sen 60° 18′. Comparar os resultados obtidos com os dados das tábuas. Resp. sen 60° 3′ $\approx 0{,}866461$; sen 60° 18′ $\approx$ $\approx 0{,}868643$.

170. Achar o valor aproximado de tg 45° 30″. Resp. 1,00262.

171. Conhecendo $\log_{10} 200 = 2{,}30103$, calcular o valor aproximado de $\log_{10} 200{,}2$. Resp. 2,30146.

Derivadas de diferentes ordens.

172. $y = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$. Calcular y''. Resp. $18x - 4$.

173. $y=\sqrt[5]{x^3}$. Calcular y'''. Resp. $\frac{42}{125}x^{-\frac{12}{5}}$.

174. $y=x^6$. Calcular $y^{(6)}$. Resp. $6!$.

175. $y=\frac{C}{x^n}$. Calcular y''. Resp. $\frac{n(n+1)C}{x^{n+2}}$.

176. $y=\sqrt{a^2-x^2}$. **Calcular** y''. **Resp.** $-\dfrac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

177. $y=2\sqrt{x}$. **Calcular** $y^{(4)}$. **Resp.** $-\dfrac{15}{8\sqrt{x^7}}$.

178. $y=ax^2+bx+c$. **Calcular** y'''. **Resp.** 0.

179. $f(x)=\text{Log}(x+1)$. **Calcular** $f^{\text{IV}}(x)$. **Resp.** $-\dfrac{6}{(x+1)^4}$.

180. $y=\text{tg}\, x$. **Calcular** y'''. **Resp.** $6\sec^4 x-4\sec^2 x$.

181. $y=\text{Log sen}\, x$. **Calcular** y'''. **Resp.** $2\,\text{ctg}\, x\,\text{cosec}^2 x$.

182. $f(x)=\sqrt{\sec 2x}$. **Calcular** $f''(x)$. **Resp.** $f''(x)=3[f(x)]^5-f(x)$.

183. $y=\dfrac{x^3}{1-x}$. **Calcular** $f^{\text{IV}}(x)$. **Resp.** $\dfrac{4\,!}{(1-x)^5}$.

184. $p=(q^2+a^2)\,\text{arc tg}\,\dfrac{q}{a}$. **Calcular** $\dfrac{d^3p}{dq^3}$. **Resp.** $\dfrac{4a^3}{(a^2+q^2)^2}$.

185. $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$. **Calcular** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. **Resp.** $\dfrac{y}{a^2}$.

186. $y=\cos ax$. **Calcular** $y^{(n)}$. **Resp.** $a^n\cos\left(ax+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

187. $y=a^x$. **Calcular** $y^{(n)}$. **Resp.** $(\text{Log}\, a)^n a^x$.

88. $y=\text{Log}(1+x)$. **Calcular** $y^{(n)}$. **Resp.** $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)\,!}{(1+x)^n}$.

189. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$. **Calcular** $y^{(n)}$. **Resp.** $2(-1)^n\dfrac{n\,!}{(1+x)^{n+1}}$.

190. $y=e^x x$. **Calcular** $y^{(n)}$. **Resp.** $e^x(x+n)$.

191. $y=x^{n-1}\,\text{Log}\, x$. **Calcular** $y^{(n)}$. **Resp.** $\dfrac{(n-1)\,!}{x}$.

192. $y=\text{sen}^2 x$. **Calcular** $y^{(n)}$. **Resp.** $-2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}n\right)$

193. $y=x\,\text{sen}\, x$. **Calcular** $y^{(n)}$. **Resp.** $x\,\text{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}n\right)-n\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}n\right)$

194. **Se** $y=e^x\,\text{sen}\, x$, **demonstrar que** $y''-2y'+2y=0$.

195. $y^2=4ax$. **Calcular** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. **Resp.** $-\dfrac{4a^2}{y^3}$.

196. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. **Calcular** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ et $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ **Resp.** $-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$; $-\dfrac{3b^6x}{a^4y^5}$.

197. $x^2+y^2=r^2$. **Calcular** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. **Resp.** $-\dfrac{r^2}{y^3}$.

198. $y^2-2xy=0$. **Calcular** $\dfrac{d^3y}{dx^3}$. **Resp.** 0.

199. $\rho=\text{tg}(\varphi+\rho)$. **Calcular** $\dfrac{d^3\rho}{d\varphi^3}$. **Resp.** $-\dfrac{2(5+8\rho^2+3\rho^4)}{\rho^8}$.

200. $\sec\varphi\cdot\cos\rho=C$. Calcular $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}$. Resp. $\frac{\operatorname{tg}^2\rho-\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^3\rho}$.

201. $e^x+x=e^y+y$. Calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$. Resp. $\frac{(1-e^{x+y})(e^x-e^y)}{(e^y+1)^3}$.

202. $y^3+x^3-3axy=0$. Calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$. Resp. $-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$.

203. $x=a(t-\operatorname{sen}t)$, $y=a(1-\cos t)$. Calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$. Resp. $-\frac{1}{4a\operatorname{sen}^4\left(\frac{t}{2}\right)}$.

204. $x=a\cos 2t$, $y=b\operatorname{sen}^2 t$. Mostrar que $\frac{d^2y}{dx^2}=0$.

205. $x=a\cos t$, $y=a\operatorname{sen}t$. Calcular $\frac{d^3y}{dx^3}$. Resp. $-\frac{3\cos t}{a^2\operatorname{sen}^5 t}$.

206. Mostrar que $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(\operatorname{sh}x)=\operatorname{sh}x$; $\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(\operatorname{sh}x)=\operatorname{ch}x$.

Equações da tangente e da normal. Comprimentos da sub-tangente e da sub-normal.

207. Formar a equação da tangente e da normal à curva $y=x^3-3x^2-x+5$ no ponto $M(3, 2)$. Resp. A tangente $8x-y-22=0$; a normal $x+8y-19=0$.

208. Achar a equação da tangente e da normal, o comprimento da sub-tangente e da sub-normal no círculo $x^2+y^2=r^2$ no ponto $M(x_1, y_1)$. Resp. A tangente $xx_1+yy_1=r^2$; a normal $x_1y-y_1x=0$; $S_T=\left|-\frac{y_1^2}{x_1}\right|$; $S_N=|-x_1|$.

209. Mostrar que o vértice da parábola $y^2=4px$ corta a sub-tangente no centro e que o comprimento da sub-normal é constante e igual a $2p$. Fazer o desenho.

210. Achar a equação da tangente no ponto $M(x_1, y_1)$: a) à elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Resp. $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$; b) à hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Resp. $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$.

211. Achar a equação da tangente e da normal à curva $y=\frac{8a^3}{4a^2+x^2}$ no ponto em que $x=2a$. Resp. A tangente $x+2y=4a$; a normal $y=2x-3a$.

212. Mostrar que a normal à curva $3y=6x-5x^2$, dirigida ao ponto $M\left(1, \frac{1}{3}\right)$, passa pela origem das coordenadas.

213. Mostrar que a tangente à curva $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$ dirigida ao ponto $M(a, b)$ é $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$.

214. Achar a equação da tangente à parábola $y^2 = 20x$ que forma um ângulo de 45° com o eixo Ox. Resp. $y = x + 5$ [no ponto (5, 10)].

215. Achar as equações das tangentes ao círculo $x^2 + y^2 = 52$ que são paralelas à recta $2x + 3y = 6$. Resp. $2x + 3y \pm 26 = 0$.

216. Achar as equações das tangentes à hipérbole $4x^2 - 9y^2 = 36$, que são perpendiculares à recta $2y + 5x = 10$. Resp. Não há.

217. Mostrar que as porções da tangente à hipérbole $xy = m$ compreendidas entre os eixos de coordenadas têm por centro o ponto de tangência.

218. Mostrar que as porções da tangente à astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ compreendidas entre os eixos de coordenadas têm um comprimento constante.

219. Sob que ângulo se cortam as curvas $y = a^x$ e $y = b^x$? Resp. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{Log} a - \operatorname{Log} b}{1 + \operatorname{Log} a \cdot \operatorname{Log} b}$.

220. Achar o comprimento da sub-tangente, da sub-normal, da tangente e da normal à cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ no ponto para o qual $\theta = \frac{\pi}{2}$. Resp. $S_T = a$; $S_N = a$; $T = a\sqrt{2}$; $N = a\sqrt{2}$.

221. Calcular S_T, S_N, T e N para a hipocicloide $x = 4a\cos^3 t$, $y = 4a\operatorname{sen}^3 t$. Resp. $S_T = |4a\operatorname{sen}^2 t\cos t|$; $S_N = \left|4a\dfrac{\operatorname{sen}^4 t}{\cos t}\right|$; $T = 4a\operatorname{sen}^2 t$; $N = |4a\operatorname{sen}^2 t\operatorname{tg} t|$.

Problemas diversos

Calcular as derivadas das funções:

222. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x} - \dfrac{1}{2}\operatorname{Log}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$. Resp. $y' = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

223. $y = \operatorname{arc\,sen}\dfrac{1}{x}$. Resp. $y' = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$.

224. $y = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$. Resp. $y' = \dfrac{\cos x}{|\cos x|}$.

225. $y = \dfrac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a - b}{a + b}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Resp. $y' = \dfrac{1}{a + b\cos x}$.

226. $y = |x|$. Resp. $y' = \dfrac{x}{|x|}$.

227. $y = \operatorname{arc\,sen}\sqrt{1 - x^2}$. Resp. $y' = -\dfrac{x}{|x|}\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

228. Resulta das fórmulas $v=\frac{4}{3}\pi r^3$ e $s=4\pi r^2$ para o volume e a superfície da esfera que $\frac{dv}{dr}=s$. Explicitar a significação geométrica deste resultado. Achar uma relação análoga entre a superfície do círculo e o comprimento da circunferência.

229. No triângulo ABC o lado a exprime-se em função dos outros dois lados b, c e do ângulo A que eles formam pela fórmula $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$. Quando os lados b e c são constantes, o lado a é função do ângulo A. Mostrar que $\frac{da}{dA}=h_a$, em que h_a designa a altura do triângulo correspondente à base a. Explicar o resultado com o auxílio de considerações geométricas.

230. Utilizando a noção de diferencial, explicar a proveniência das fórmulas aproximadas $\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}$, $\sqrt[3]{a^3+b}\approx a+\frac{b}{3a^2}$, em que $|b|$ é um número pequeno em relação a a.

231. O período de oscilação do pêndulo é igual a $T=\pi\sqrt{l/g}$. Que influência sobre o erro de cálculo do período T exercerá um erro de 1 % fora da medida: 1) do comprimento do pêndulo l; 2) da aceleração da gravidade g? Resp. 1) $\approx 1/2$ % ; 2) $\approx 1/2$ %.

232. A tractriz tem a propriedade de em cada um dos seus pontos o segmento da tangente T conservar um valor constante. Demonstrar isto utilizando: 1) a equação da tractriz sob a forma

$$x=\sqrt{a^2-y^2}+\frac{a}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{a+\sqrt{a^2-y^2}} \quad (a>0);$$

2) as equações paramétricas da curva

$$x=a\,(\mathrm{Log}\,\mathrm{tg}\,t/2+\cos t),\quad y=a\,\mathrm{sen}\,t.$$

233. Demonstrar que a função $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ verifica a equação $y''+3y'+$ $+2y=0$ (C_1 e C_2 designam aqui constantes).

234. Demonstrar a igualdade $y''=2z$ e $z''=-2y$, se $y=e^x\,\mathrm{sen}\,x$, $z=e^x\cos x$.

235. Mostrar que a função $y=\mathrm{sen}\,(m\,\mathrm{arc\,sen}\,x)$ verifica a equação $(1-x^2)\times$ $\times\, y''-xy'+m^2y=0$.

236. Demonstrar que se $(a+bx)\,e^{\frac{y}{x}}=x$, então $x^3\frac{d^2y}{dx^2}=\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2$.

Capítulo IV

TEOREMAS RELATIVOS ÀS FUNÇÕES DERIVÁVEIS

§ 1. Teorema relativo às raízes da derivada
(teorema de Rolle)

Teorema de Rolle — *Se a função* f (x) *é contínua no segmento* [a, b], *derivável em qualquer ponto interior do segmento e se anula nas extremidades deste segmento* [f (a) = f (b) = 0], *então, existe pelo menos um ponto intermediário* x = c, a < c < b, *em que a derivada* f′ (x) *se anula, isto é,* f′ (c) = 0 (*).

Demonstração — A função $f(x)$ sendo contínua sobre o segmento $[a, b]$, atinge pelo menos uma vez neste segmento, o seu limite superior M e o seu limite inferior m.

Se $M = m$, a função $f(x)$ é constante, isto é, que para todos os valores de x a função tem um valor constante $f(x) = m$. Mas então, em qualquer ponto do segmento, teremos $f'(x) = 0$ e o teorema fica demonstrado.

Suponhamos que $M \neq m$. Neste caso pelo menos um destes números é diferente de zero

Suponhamos, para fixar ideias, que $M > 0$ e que a função atinge o seu limite superior M no ponto $x = c$, isto é, que $f(c) = M$. Notamos, neste caso, que c é distinto de a e de b, porque em virtude da hipótese $f(a) = 0 = f(b)$; sendo $f(c)$ o limite superior da função $f(x)$, $f(c + \Delta x) - f(c) \leqslant 0$ tanto para Δx positivo como para Δx negativo.

Daí resulta que:

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leqslant 0 \quad \text{para} \quad \Delta x > 0, \tag{1'}$$

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geqslant 0 \quad \text{para} \quad \Delta x < 0. \tag{1''}$$

(*) O número c chama-se raíz da função $\varphi(x)$, se $\varphi(c) = 0$.

Dado que as condições do teorema implicam a existência da derivada no ponto $x = c$, temos passando ao limite para $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leqslant 0 \quad \text{para} \quad \Delta x > 0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geqslant 0 \quad \text{para} \quad \Delta x < 0.$$

Mas as desigualdades $f'(c) \leqslant 0$ e $f'(c) \geqslant 0$ só são compatíveis no caso em que $f'(c) = 0$. Por conseguinte, provamos a existência dum ponto e interior ao segmento $[a, b]$ tal que neste ponto $f'(x)$ se anula.

O teorema de Rolle admite uma interpretação geométrica simples: se uma curva contínua tendo uma tangente em cada ponto corta

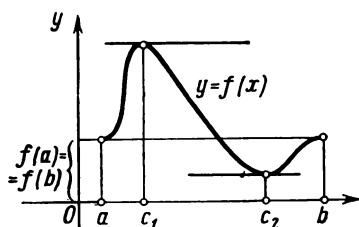
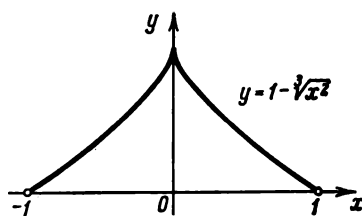



Fig. 91 Fig. 92

o eixo Ox nos pontos de abcissas a e b, existe sobre esta curva pelo menos um ponto de abcissa c, $a < c < b$, tal que a tangente neste ponto é paralela ao eixo Ox.

Nota — 1. O teorema permanece válido para uma função derivável que não se anula nas extremidades do segmento $[a, b]$, mas toma nestes pontos valores iguais $f(a) = f(b)$ (fig. 91). Neste caso a demonstração é idêntica à anterior.

Nota — 2. Se $f(x)$ é uma função tal que a sua derivada não existe em certos pontos do intervalo aberto (a, b), então o teorema pode cessar de ser verdadeiro (isto é, que neste caso pode não existir neste intervalo $[a, b]$ um ponto intermediário e em que a derivada $f(x)$ se anula).

Por exemplo, a função

$$y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

(fig. 92) é contínua sobre o segmento $[-1, 1]$ e anula-se nas extremidade do segmento; todavia, a derivada

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

não se anula no interior deste segmento. Isto provém do facto de no interior deste segmento existir um ponto $x = 0$ em que a derivada não existe (ela torna-se infinita).

O gráfico representado na figura 93 dá igualmente um exemplo de função cuja derivada não se anula em nenhum ponto do segmento [0, 2].

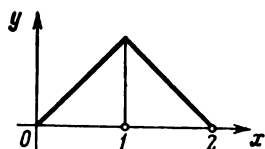



Fig. 93

As hipóteses de validade do teorema de Rolle já são satisfeitas por esta função, pois no ponto $x = 1$ a derivada não existe.

§ 2. Teorema dos crescimentos finitos (*teorema de Lagrange*)

Teorema de Lagrange — *Se a função* f (x) *é contínua sobre o segmento* [a, b], *derivável em qualquer ponto interior deste segmento, existe, então, pelo menos um ponto* c, $a < c < b$, *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (1)$$

Demonstração — Designemos por Q o número $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, isto é, façamos

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (2)$$

Consideremos a função auxiliar $F(x)$ definida pela igualdade:

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q. \quad (3)$$

Esclareçamos a natureza geométrica da função $F(x)$. Para isso, formemos, primeiro, a equação da corda AB (fig. 94) tendo em vista que o seu coeficiente angular é igual a $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = Q$

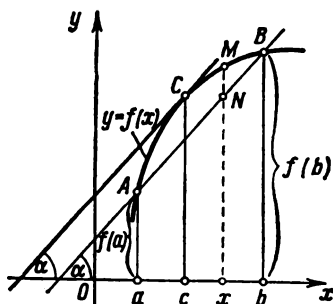



Fig. 94

e que esta corda passa pelo ponto $[a; f(a)]$:

$$y - f(a) = Q(x - a),$$

donde,

$$y = f(a) + Q(x - a).$$

Mas $F(x) = f(x) - [f(a) + Q(x - a)]$. Por conseguinte, para cada valor de x, $F(x)$ é igual à diferença das ordenadas da curva $y = f(x)$ e da corda $y = f(a) + Q(x - a)$ para os pontos da mesma abcissa x.

Vê-se fàcilmente que $F(x)$ é contínua sobre o segmento $[a, b]$, derivável em (a, b) e anula-se nas extremidades deste intervalo, isto é, $F(a) = 0$ e $F(b) = 0$. Por conseguinte, as condições de validade do teorema de Rolle são satisfeitas para esta função. Em virtude deste teorema, existe um ponto $x = c$ no interior deste segmento tal que

$$F'(c) = 0.$$

Mas

$$F'(x) = f'(x) - Q.$$

Logo,

$$F'(c) = f'(c) - Q = 0,$$

donde

$$Q = f'(c).$$

Substituindo este valor de Q na igualdade (2) temos:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \tag{1'}$$

donde se deduz imediatamente a fórmula (1). Assim, o teorema fica demonstrado

Para compreender a significação geométrica do teorema de Lagrange reportemo-nos à figura 94. Segundo esta figura, vê-se que a grandeza $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ é a tangente do ângulo α que forma a corda que passa pelos pontos A e B de abcissas a e b do gráfico e eixo positivo dos x.

Por outro lado, $f'(c)$ é igual à tangente do ângulo que forma a tangente à curva no ponto de abcissa c e o eixo positivo dos x. Assim, a igualdade (1') (ou a igualdade equivalente (1)) pode ser interpretada geomètricamente da maneira seguinte: se a curva admite uma tangente em qualquer ponto do arco AB, existe, então, um ponto C entre A e B tal que a *tangente neste ponto é paralela à corda AB*.

Por outro lado, visto que c verifica a condição $a < c < b$, então, $c - a < b - a$ ou

$$c - a = \theta(b - a),$$

em que θ é um número positivo compreendido entre 0 e 1, isto é,

$$0 < \theta < 1.$$

Mas então,

$$c = a + \theta(b - a)$$

e pode-se pôr a fórmula (1) sob a forma:

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'[a + \theta(b - a)], \quad 0 < \theta < 1 \tag{1''}$$

§ 3. Teorema de Cauchy

(relações dos crescimentos de duas funções)

Teorema de Cauchy — *Sejam* f (x) *e* φ (x) *duas funções contínuas sobre o segmento* [a, b], *deriváveis em* [a, b] *e seja* φ (x) *tal que* φ' (x) *não se anule em nenhum ponto de* [a, b]; *existe, então, um ponto* x = c *no interior de* [a, b], a < c < b, tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \tag{1}$$

Demonstração — Definamos Q pela igualdade:

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \tag{2}$$

Notemos que $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, visto que no caso contrário $\varphi(b)$ será igual a $\varphi(a)$, o que implicará, em virtude do teorema de Rolle, que $\varphi'(x) = 0$ num ponto interior do segmento, o que contradiz as condições do teorema.

Formemos a função auxiliar:

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q[\varphi(x) - \varphi(a)]$$

É evidente que $F(a) = 0$ e $F(b) = 0$ (isto resulta da definição da função $F(x)$ e do número Q). Notemos que para a função $F(x)$ as hipóteses de validade do teorema de Rolle são satisfeitas. Podemos, então, concluir que existe um número c entre a e b $(a < c < b)$ tal que $F'(c) = 0$. Mas $F'(x) = f'(x) - Q\varphi'(x)$, por conseguinte,

$$F'(c) = f'(c) - Q\varphi'(c) = 0,$$

donde

$$Q = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

Substituindo este valor de Q na igualdade (2), temos a igualdade (1).

Nota — O teorema de Cauchy não pode ser demonstrado, como se poderia julgar, aplicando o teorema de Lagrange ao numerador e ao denominador da função

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$$

Com efeito, procedendo-se desta maneira, obteremos (depois de termos simplificado a fracção por $b - a$) a fórmula

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c_1)}{\varphi'(c_2)},$$

em que $a < c_1 < b$, $a < c_2 < b$. Mas em geral, $c_1 \neq c_2$, este resultado não permite obter o teorema de Cauchy.

§ 4. Limite do quociente de dois infinitamente pequenos

(verdadeiro valor das indeterminações da forma $\frac{0}{0}$*)*

Sejam $f(x)$ e $\varphi(x)$ duas funções definidas sobre o segmento $[a, b]$ satisfazendo as condições do teorema de Cauchy e anulando-se no ponto $x = a$ deste segmento, isto é, $f(a) = 0$ e $\varphi(a) = 0$.

O quociente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ não é definido no ponto $x = a$, mas em qualquer ponto $x \neq a$, é uma quantidade bem determinada. Eis porque nos podemos propor a encontrar o limite deste quociente quando $x \to a$. O cálculo de limites semelhantes chama-se «cálculo do verdadeiro valor das indeterminações da forma $\frac{0}{0}$»; diz-se também: «levantar a indeterminação da forma $\frac{0}{0}$».

Fizemos já referência a um problema deste género, por ocasião do estudo do limite $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e do cálculo das derivadas de certas funções elementares. A expressão $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ não tem significado para $x = 0$, por outras palavras, a função $F(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ não é definida neste ponto, mas vimos que o limite da expressão $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x \to 0$ existe e é igual a 1.

Teorema (Regra de L'Hospital) — *Sejam* $f(x)$ *e* $\varphi(x)$ *duas funções que satisfazem às condições do teorema de Cauchy sobre um certo segmento* $[a, b]$ *e anulando-se no ponto* $x = a$, *isto é,* $f(a) = \varphi(a) = 0$.

Se, além disso, o limite do quociente $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ *existe quando* $x \to a$, *então,* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *existe e*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Demonstração — Escolhamos um ponto $x \neq a$ arbitrário sobre o segmento $[a, b]$. Aplicando a fórmula de Cauchy, temos:

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \tag{1}$$

em que ξ é um ponto compreendido entre a e x. Mas por hipótese $f(a) = \varphi(a) = 0$, por conseguinte,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{2}$$

Se $x \to a$, ξ tende igualmente para a, visto que ξ está compreendido entre x e a. Além disso, se $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, $\lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ existe e é igual a A. Por conseguinte, é evidente que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A,$$

e em definitivo:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Nota — 1. O teorema é igualmente válido no caso em que $f(x)$ e $\varphi(x)$ *não são definidos* no ponto $x = a$, mas

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0.$$

Este caso reduz-se sem dificuldade ao anterior, se se definir as funções $f(x)$ e $\varphi(x)$ no ponto $x = a$ de maneira que elas sejam contínuas neste ponto. Para isso, basta fazer

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = 0; \quad \varphi(a) = \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0,$$

visto que, evidentemente, o limite do quociente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, quando $x \to a$, não depende do valor de $f(x)$ e de $\varphi(x)$ no ponto $x = a$.

Nota — 2. Se $f'(a) = \varphi'(a) = 0$ e se as derivadas $f'(x)$ e $\varphi'(x)$ satisfazem às condições requeridas para a validade do teorema, podemos aplicar de novo a regra de L'Hospital no quociente $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$; deduzimos aqui, por conseguinte, a fórmula $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$, etc.

Nota — 3. Se $\varphi'(a) = 0$, mas $f'(x) \neq 0$, o teorema pode ser aplicado ao quociente inverso $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, que tende para zero por $x \to a$. Por conseguinte, o quociente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tende para o infinito.

Exemplo — 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, 5x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\text{sen}\, 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{5 \cos 5x}{3} = \frac{5}{3}.$$

Exemplo — 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{Log}\,(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Exemplo — 3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{sen}\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\text{sen}\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Tivemos de aplicar aqui três vezes seguidas a regra de L'Hospital, visto que o quociente das derivadas primeiras, segundas e terceiras conduziu à indeterminação $\frac{0}{0}$ para $x = 0$.

Nota — 4. A regra de L'Hospital pode igualmente ser aplicada no caso em que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0.$$

Com efeito, façamos $x = \frac{1}{z}$; vimos que $z \to 0$ quando $x \to \infty$ e, por conseguinte,

$$\lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \qquad \lim_{z \to 0} \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

Aplicando a regra de L'Hospital ao quociente $\dfrac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$, obtemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

como se queria demonstrar.

Exemplo — 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{k}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{k\cos\frac{k}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}k\cos\frac{k}{x}=k.$$

§ 5. Limite do quociente de dois infinitamente grandes

(verdadeiro valor das indeterminações da forma $\frac{\infty}{\infty}$*)*

Consideremos agora o problema do limite do quociente de duas funções $f(x)$ e $\varphi(x)$ tendendo para o infinito quando $x\to a$ (ou quando $x\to\infty$).

Teorema — *Sejam* f (x) *e* φ (x) *duas funções contínuas e deriváveis em qualquer ponto* $x\neq a$ *na vizinhança do ponto* a; *a derivada* $\varphi'(x)$ *não se anula em nenhum ponto desta vizinhança e, além disso,*

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\qquad \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty.$$

Se o limite

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A \tag{1}$$

existe, então o limite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *existe igualmente e*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A. \tag{2}$$

Demonstração — Escolhamos dois pontos arbitrários α e x na vizinhança do ponto a de modo que $\alpha < x < a$ (ou $a > x > \alpha$). Em virtude do teorema de Cauchy, temos:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{\varphi(x) - \varphi(\alpha)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \tag{3}$$

em que $\alpha < c < x$. Transformemos o membro esquerdo da igualdade (3):

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{\varphi(x) - \varphi(\alpha)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}. \tag{4}$$

Deduzimos das relações (3) e (4):

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}.$$

Donde tiramos:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}. \tag{5}$$

Resulta da condição (1) que, para $\varepsilon > 0$ arbitràriamente pequeno, se pode escolher α suficientemente vizinho de a para que a desigualdade

$$\left| \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - A \right| < \varepsilon$$

ou

$$A - \varepsilon < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} < A + \varepsilon \tag{6}$$

seja satisfeita para todos os $x = c$ em que $\alpha < c < a$. Consideremos em seguida a fracção

$$\frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}$$

Fixemos α de maneira que a desigualdade (6) seja satisfeita, e façamos tender x para a. Visto que $f(x) \to \infty$ e $\varphi(x) \to \infty$ para $x \to a$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} = 1,$$

e, por conseguinte, para todo $\varepsilon > 0$ prèviamente escolhido, teremos para todos os x suficientemente vizinhos de a

$$\left| 1 - \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} \right| < \varepsilon$$

ou

$$1 - \varepsilon < \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} < 1 + \varepsilon. \tag{7}$$

Multiplicando os membros correspondentes das desigualdades (6) e (7), temos:

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon),$$

e em virtude da igualdade (5)

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon).$$

Sendo ε arbitràriamente pequeno quando x é suficientemente vizinho de a, deduzimos destas últimas desigualdades que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A$$

ou em virtude de (1)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A,$$

c. q. d.

Nota — 1. Se nas condições (1) se faz $A=\infty$, isto é, se

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\infty,$$

a igualdade (2) fica válida igualmente neste caso. Com efeito, resulta da relação anterior:

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=0.$$

Então, segundo o teorema que acabamos de demonstrar,

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=0,$$

donde

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty.$$

Nota — 2. O teorema pode ser fàcilmente estendido ao caso em que $x\to\infty$. Se os limites $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ existe, então,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (8)$$

Demonstra-se esta proposição efectuando a mudança de variáveis $x=\frac{1}{z}$, como no caso da indeterminação da forma $\frac{0}{0}$ (ver § 4, nota, 4).

Exemplo — 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$

Nota — 3. Chamamos uma vez mais a atenção para o facto de que as fórmulas (2) e (8) apenas são válidas se o limite do segundo membro existir (finito ou infinito). Pode acontecer que o limite do primeiro membro exista, enquanto que o limite do segundo membro não existe. Eis um exemplo. Seja calcular o limite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x}.$$

Este limite existe e é igual a 1. Com efeito,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1.$$

Mas o quociente das derivadas

$$\frac{(x + \operatorname{sen} x)'}{(x')} = \frac{1 + \cos x}{1} = 1 + \cos x$$

não tende para nenhum limite quando $x \to \infty$, porque oscila entre 0 e 2.

Exemplo — 2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2 + b}{cx^2 - d} = \lim_{x\to\infty} \frac{2ax}{2cx} = \frac{a}{c}.$$

Exemplo — 3.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\frac{2\cdot 3\cos 3x \operatorname{sen} 3x}{2\cos x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{(-1)}{(1)} = 3\,\frac{(-1)}{(1)}\cdot\frac{(-1)}{(1)} = 3.$$

Exemplo — 4.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Geralmente, para todo o inteiro $n > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots 1}{e^x} = 0.$$

Os outros casos de indeterminação que se nota simbòlicamente:

a) $0 \cdot \infty$; b) 0^0; c) ∞^0; d) 1^∞; e) $\infty - \infty$

reduzem-se aos casos anteriores que acabamos de estudar. Explicitemos estas notações simbólicas.

a) Dado que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$; $\lim_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, pede-se para calcular limite

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot \varphi(x)].$$

É uma indeterminação da forma $0 \cdot \infty$.
Escrevamos esta expressão sob a forma:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

ou

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

quando $x \to a$ temos uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo — 5.

$$\lim_{x \to 0} x^n \cdot \text{Log}\, x = \lim_{x \to 0} \frac{\text{Log}\, x}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n+1}}} = -\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{n} = 0.$$

b) Dado que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0,$$

pede-se para calcular o limite

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{\varphi(x)},$$

ou, por outras palavras, para levantar a indeterminação da forma 0^0.
Façamos

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)}$$

Tomemos o logaritmo dos dois membros desta expressão:

$$\text{Log}\, y = \varphi(x) \quad [\text{Log}\, f(x)]$$

Quando $x \to a$ temos (à direita) uma indeterminação da forma $0 \cdot \infty$. Conhecendo $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{Log} y$, determina-se fàcilmente $\lim\limits_{x \to a} y$. Com efeito, em virtude da continuidade da função logarítmica, $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{Log} y = \operatorname{Log} \lim\limits_{x \to a} y$ e se $\operatorname{Log} \lim\limits_{x \to a} y = b$, então, é evidente que $\lim\limits_{x \to a} y = e^b$. Se em particular $b = +\infty$ ou $-\infty$, teremos respectivamente $\lim y = +\infty$ ou 0.

Exemplo — 6. Seja calcular $\lim\limits_{x \to 0} x^x$. Fazendo $y = x^x$, encontramos $\operatorname{Log} \lim y = \lim \operatorname{Log} y = \lim \operatorname{Log}(x^x) = \lim (x \operatorname{Log} x)$;

$$\lim_{x \to 0} (x \operatorname{Log} x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Log} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0} x = 0,$$

por conseguinte, $\operatorname{Log} \lim y = 0$, donde $\lim y = e^0 = 1$, isto é, $\lim\limits_{x \to 0} x^x = 1$.

Acha-se duma maneira análoga os limites nos outros casos de indeterminação.

§ 6. Fórmula de Taylor

Suponhamos que as derivadas da função $y = f(x)$ existem até à ordem $(n+1)$ inclusivamente numa dada vizinhança do ponto $x = a$. Procuramos um polinómio $y = P_n(x)$ de grau não superior a n, cujo valor no ponto $x = a$ é igual ao valor da função $f(x)$ neste ponto, e cujos valôres no ponto $x = a$ das derivadas sucessivas até à ordem n inclusa são respectivamente iguais aos valores neste ponto das derivadas correspondentes da função $f(x)$

$$P_n(a) = f(a), \quad P'_n(a) = f'(a), \quad P''_n(a) = f''(a), \ \ldots$$
$$\ldots, \ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \tag{1}$$

Pode-se, naturalmente, esperar que este polinómio seja num certo sentido «próximo» da função $f(x)$.

Procuremo-lo sob a forma dum polinómio segundo as potências inteiras de $(x-a)$ e cujos coeficientes são indeterminados

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \ldots$$
$$\ldots + C_n(x-a)^n. \tag{2}$$

Determinemos os coeficientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de maneira que seja satisfeita a relação (1).

Calculemos, de seguida, as derivadas de $P_n(x)$:

$$\left.\begin{aligned} P'_n(x) &= C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \ldots \\ &\quad \ldots + nC_n(x-a)^{n-1}, \\ P''_n(x) &= 2C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + \ldots \\ &\quad \ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n^{(n)}(x) &= n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot C_n. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Substituindo x por a nas igualdades (2) e (3) e [em virtude da igualdade (1)] $P_n(a)$ por $f(a)$, $P'_n(a)$ por $f'(a)$, etc., temos:

$$f(a) = C_0$$

$$f'(a) = C_1$$

$$f''(a) = 2\cdot 1\cdot C_2$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot C_n,$$

donde encontramos:

$$\left.\begin{aligned} &C_0 = f(a), \quad C_1 = f'(a), \quad C_2 = \frac{1}{1\cdot 2} f''(a), \\ &C_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a), \ \ldots, \ C_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} f^{(n)}(a). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Substituindo os valores dos coeficientes C_1, C_2, ..., C_n na fórmula (2), encontramos o polinómio que se queria:

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) +$$

$$+ \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} f^{(n)}(a). \quad (5)$$

Designemos por $R_n(x)$ a diferença entre a função $f(x)$ e o polinómio assim constituído $P_n(x)$ (fig. 95):

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

donde

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

ou mais explìcitamente

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\dots$$

$$\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x). \qquad (6)$$

Chama-se a $R_n(x)$ o *resto*. Para todos os valores de x tais que o resto seja pequeno, o polinómio $P_n(x)$ dá uma aproximação bastante boa da função $f(x)$.

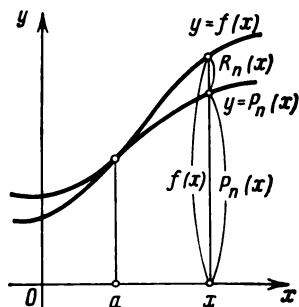



Fig. 95

Assim, a fórmula (6) permite substituir a função $y=f(x)$ pelo polinómio $y=P_n(x)$ com um grau de precisão igual ao resto $R_n(x)$.

O problema que se põe agora é o de avaliar o resto $R_n(x)$ para diversos valores de x.

Escrevamos o resto sob a forma

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x), \qquad (7)$$

em que $Q(x)$ é uma função a determinar. Ponhamos a fórmula (6) sob a forma:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\dots$$

$$\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x). \qquad (6')$$

Para x e a fixos, a função $Q(x)$ tem um valor bem determinado; designemo-lo por Q.

Consideremos, em seguida, uma função auxiliar de t (t está compreendido entre a e x):

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{x-t}{1}f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)-\dots$$

$$\dots-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q,$$

em que Q é definido pela relação (6'); supõe-se que a e x são números bem determinados.

Calculemos a derivada $F'(t)$:

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1} f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!} f''(t) -$$

$$-\frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) + \ldots - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) +$$

$$+\frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} Q$$

ou depois de se ter simplificado:

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} Q. \quad (8)$$

Assim, a derivada da função $F(t)$ existe para todos os pontos t vizinhos do ponto de abcissa a.

Notemos, igualmente, que [em virtude da fórmula (6')]

$$F(x) = 0, \qquad F(a) = 0.$$

Logo, as condições de validade do teorema de Rolle são satisfeitas para a função $F(t)$ e, por conseguinte, existe um valor $t = \xi$, compreendido entre a e x, para o qual $F'(\xi) = 0$. Daí deduzimos, em virtude da relação (8):

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^n}{n!} Q = 0,$$

donde

$$Q = f^{(n+1)}(\xi).$$

Substituindo esta expressão na fórmula (7), temos:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

É a *fórmula de Lagrange* para o resto. Visto que ξ está compreendido entre x e a, podemos pô-lo sob a forma (*)

$$\xi = a + \theta(x-a),$$

onde θ é um número compreendido entre 0 e 1, isto é, $0 < \theta < 1$; a fórmula que dá o resto fica:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)].$$

(*) Ver o fim do § 2 do presente capítulo.

A fórmula

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)] \qquad (9)$$

chama-se *fórmula de Taylor* da função $f(x)$.

Se na fórmula de Taylor se faz $a=0$, encontra-se:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x), \qquad (10)$$

onde θ está compreendido entre 0 e 1. Este caso particular da fórmula de Taylor é conhecido sob o nome de *fórmula de Maclaurin.*

§ 7. Desenvolvimento das funções e^x, sen x, cos x pela fórmula de Taylor

1. *Desenvolvimento da função* $f(x)=e^x$.

Calculando as derivadas sucessivas de $f(x)$, temos:

$$f(x)=e^x, \qquad f(0)=1,$$

$$f'(x)=e^x, \qquad f'(0)=1,$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=e^x, \qquad f^{(n)}(0)=1.$$

Substituindo as expressões encontradas na fórmula (10) § 6, temos:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},$$

$$0<\theta<1.$$

Se $|x|\leqslant 1$, então, fazendo $n=8$, tem-se para o resto a estimativa seguinte:

$$R_8<\frac{1}{9!}3.$$

A fórmula obtida fazendo $x = 1$ permite calcular o valor aproximado do número e:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!}.$$

Se se efectua os cálculos conservando 5 algarismos depois da vírgula, tem-se:

$$e = 2{,}71828.$$

Os quatro primeiros algarismos depois da vírgula são exactos visto que o erro não excede o número $\frac{3}{9!}$ ou 0,00001.

Notemos que qualquer que seja x, o resto

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \to 0 \qquad \text{quando } n \to \infty.$$

Com efeito, visto que $\theta < 1$, a quantidade $e^{\theta x}$ é limitada, para x fixo (ela é menor que e^x se $x > 0$ e menor que 1, se $x < 0$).

Demonstremos que para qualquer x fixo

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \qquad \text{quando } n \to \infty.$$

Com efeito,

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1}\right|.$$

Se x é um número fixo, existe então um inteiro positivo N tal que

$$|x| < N.$$

Façamos $\frac{|x|}{N} = q$; então, tendo em conta que $0 < q < 1$, podemos escrever para $n = N+1,, N+2, N+3, \ldots$, etc.:

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n+1}\right| =$$

$$= \left|\frac{x}{1}\right| \cdot \left|\frac{x}{2}\right| \cdot \left|\frac{x}{3}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{x}{N-1}\right| \cdot \left|\frac{x}{N}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{x}{n}\right| \cdot \left|\frac{x}{n+1}\right| <$$

$$< \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{N-1} \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q = \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} q^{n-N+2},$$

porque

$$\left|\frac{x}{N}\right|=q; \quad \left|\frac{x}{N+1}\right|<q;\ldots; \quad \left|\frac{x}{n+1}\right|<q.$$

Mas $\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ é uma constante e, por conseguinte, não depende de n; por outro lado, q^{n-N+2} tende para zero para $n \to \infty$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0. \tag{1}$$

Por conseguinte, $R_n(x) = e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ tende igualmente para zero para $n \to \infty$.

Resulta do precedente que qualquer que seja x, podemos calcular e^x com a precisão desejada com a condição de tomar um número suficientemente grande de termos.

2. *Desenvolvimento da função* f (x) = *sen* (x):

$$f(x)=\operatorname{sen} x, \qquad f(0)=0,$$

$$f'(x)=\cos x=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0)=1,$$

$$f''(x)=-\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}\left(x+2\frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(0)=0,$$

$$f'''(x)=-\cos x=\operatorname{sen}\left(x+3\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'''(0)=-1.$$

$$f^{I}(x)=\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}\left(x+4\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{IV}(0)=0,$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=\operatorname{sen}\left[x+n\frac{\pi}{2}\right], \qquad f^{(n)}(0)=\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x)=\operatorname{sen}\left[x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right], \qquad f^{(n+1)}(\xi)=\operatorname{sen}\left[\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Substituindo as expressões encontradas na fórmula (10) § 6, daí deduzimos o desenvolvimento da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, segundo a fórmula de Taylor:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} -$$

$$\ldots + \frac{x^n}{n!} \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{sen} \left[\xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right].$$

Como $\left| \operatorname{sen} \left[\xi + (n+1) \frac{\pi}{2} \right] \right| \leqslant 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ para todos os valores de x.

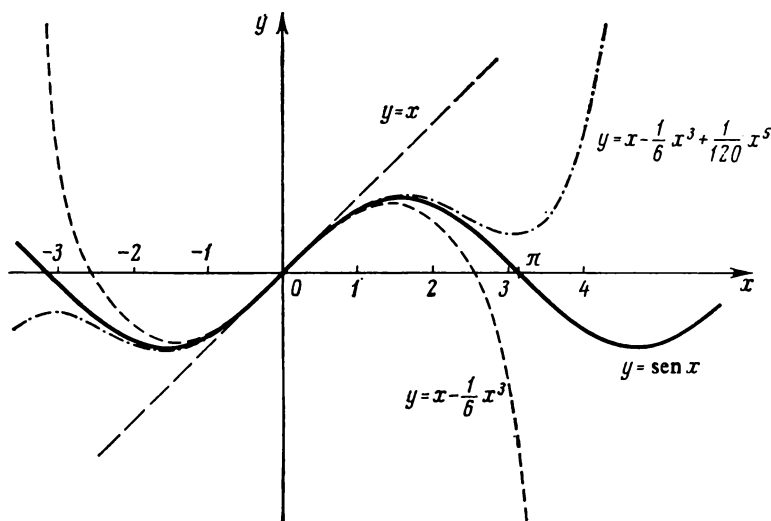



Fig. 96

Apliquemos a fórmula assim achada ao cálculo do valor aproximado de sen 20°. Façamos $n = 3$, isto é, consideremos apenas os dois primeiros termos do desenvolvimento:

$$\operatorname{sen} 20^\circ = \operatorname{sen} \frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9} \right)^3 = 0{,}343.$$

Avaliemos o erro cometido que é igual ao resto:

$$|R_3| = \left| \left(\frac{\pi}{9} \right)^4 \frac{1}{4!} \operatorname{sen} (\xi + 2\pi) \right| \leqslant \left(\frac{\pi}{9} \right)^4 \frac{1}{4!} = 0{,}0006 < 0{,}001.$$

O erro cometido é pois inferior a 0,001, isto é, que sen 20° = 0,343 a menos de 0,001.

Os gráficos da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ e das três primeiras aproximações estão dados na figura 96:

$$S_1(x) = x; \quad S_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}; \quad S_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

3. *Desenvolvimento da função* f (x) = *cos* x.

Calculando as derivadas sucessivas da função $f(x) = \cos x$ no ponto $x = 0$ e substituindo-as na fórmula de Maclaurin, encontramos o desenvolvimento:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4} - \ldots + \frac{x^n}{n!} \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left[\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right],$$

$$|\xi| < |x|.$$

Neste caso igualmente $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ para todos os valores de x.

Exercícios

Verificar o teorema de Rolle para as funções:

1. $y = x^2 - 3x + 2$ sobre o segmento $[1, 2]$.
2. $y = x^3 + 5x^2 - 6x$ sobre o segmento $[0, 1]$.
3. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ sobre o segmento $[1, 3]$.
4. $y = \operatorname{sen}^2 x$ sobre o segmento $[0, \pi]$.
5. A função $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$ tem por raízes 1 e -1. Achar a raíz da derivada $f'(x)$, de que é assunto no teorema de Rolle.
6. Verificar que entre as raízes da função $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ se encontra uma raíz da sua derivada.
7. Verificar o teorema de Rolle para a função $y = \cos^2 x$ sobre o segmento
$$\left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right].$$
8. A função $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ anula-se nas extremidades do segmento $[-1, 1]$. Verificar que a derivada desta função não se anula em nenhum ponto do intervalo $(-1, 1)$. Explicar porque não se pode aplicar aqui o teorema de Rolle.
9. Compôr a fórmula de Lagrange para a função $y = \operatorname{sen} x$ sobre o segmento $[x_1, x_2]$. Resp. $\operatorname{sen} x_2 - \operatorname{sen} x_1 = (x_2 - x_1) \cos c$, $x_1 < c < x_2$.
10. Verificar a fórmula de Lagrange para a função $y = 2x - x^2$ sobre o segmento $[0, 1]$.
11. Em que ponto a tangente à curva $y = x^n$ é paralela à corda subtendo os pontos $M_1(0, 0)$ e $M_2(a, a^n)$? Resp. No ponto da abcissa $c = \dfrac{a}{\sqrt[n-1]{n}}$.

12. Em que ponto a tangente à curva $y = \operatorname{Log} x$ é paralela à corda subtendo os pontos $M_1(1, 0)$ e $M_2(e, 1)$? Resp. No ponto da abcissa $c = e - 1$.
Utilizar a fórmula de Lagrange para demonstrar as desigualdades:

13. $e^x \geqslant 1 + x$. 14. $\operatorname{Log}(1+x) < x$ $(x > 0)$. 15. $b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$ para $b > a$. 16. $\operatorname{arc\,tg} x < x$.

17. Escrever a fórmula de Cauchy para as funções $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = x^3$ sobre o segmento $[1, 2]$ e achar c. Resp. $c = \frac{14}{9}$.

Calcular os limites seguintes:

18. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$. Resp. $\frac{1}{n}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$. Resp. 2.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$. Resp. 2.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$. Resp. -2.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}}$. Resp. O limite não existe ($\sqrt{2}$ para $x \to +0$, $-\sqrt{2}$ para $x \to -0$).

23. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Log} \operatorname{sen} x}{(\pi - 2x)^2}$. Resp. $-\frac{1}{8}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$. Resp. $\operatorname{Log} \frac{a}{b}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$. Resp. $-\frac{1}{6}$.

26. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}$. Resp. $\cos a$.

27. $\lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y + \operatorname{sen} y - 1}{\operatorname{Log}(1+y)}$. Resp. 2.

28. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x - x}{3x^2 + x^5}$. Resp. $\frac{1}{3}$.

29. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x-1}{2x+5}$. Resp. $\frac{3}{2}$.

30. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x^n}$ (em que $n > 0$). Resp. 0.

31. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arc\,ctg} x}$. Resp. 1.

32. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\operatorname{Log}\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\operatorname{Log}\left(\frac{x-1}{x}\right)}$. Resp. -1.

33. $\lim\limits_{y\to +\infty} \frac{y}{e^{ay}}$. Resp. 0 para $a > 0$; ∞ para $a \leqslant 0$.

34. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Resp. 1.

35. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{Log} \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{Log} \operatorname{sen} x}$. Resp. 1.

36. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{Log} \operatorname{tg} 7x}{\operatorname{Log} \operatorname{tg} 2x}$. Resp. 1.

37. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{Log}(x-1) - x}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2x}}$. Resp. 0.

38. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$. Resp. $\frac{2}{\pi}$.

39. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right]$. Resp. $-\frac{1}{2}$.

40. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{1}{\operatorname{Log} x} - \frac{x}{\operatorname{Log} x}\right]$. Resp. -1.

41. $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} (\sec\varphi-\operatorname{tg}\varphi)$. Resp. 0.

42. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\operatorname{Log} x}\right]$. Resp. $\frac{1}{2}$.

43. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 2x$. Resp. $\frac{1}{2}$.

44. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$. Resp. ∞.

45. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. Resp. $\frac{1}{e}$.

46. $\lim\limits_{t\to\infty} \sqrt[t]{t^2}$. Resp. 1.

47. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. Resp. 1.

48. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}$. Resp. e^a.

49. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\operatorname{Log} x}}$. Resp. $\frac{1}{e}$.

50. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$. Resp. 1.

51. $\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi^2}}$. Resp. $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$.

52. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$. Resp. $\frac{1}{e}$.

53. Decompor o polinómio $x^4-5x^3+5x^2+x+2$ segundo as potências de $x-2$. Resp. $-7(x-2)-(x-2)^2+3(x-2)^3+(x-2)^4$.

54. Decompor segundo as potências de $x+1$ o polinómio $x^5+2x^4-x^2+x+1$. Resp. $(x+1)^2+2(x+1)^3-3(x+1)^4+(x+1)^5$.

55. Escrever a fórmula de Taylor para a função $y=\sqrt{x}$ para $a=1$, $n=3$.

$$\text{Resp. } \sqrt{x}=1+\frac{x-1}{1}\cdot\frac{1}{2}-\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{(x-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{3}{8}-\frac{(x-1)^4}{4!}\times$$

$$\times\frac{15}{16}\cdot[1+\theta(x-1)]^{-\frac{7}{2}},\quad 0<\theta<1.$$

56. Escrever a fórmula de Maclaurin para a função $y=\sqrt{1+x}$ para $n=2$.

$$\text{Resp. } \sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{x^3}{16(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}},\quad 0<\theta<1.$$

57. Utilizar os resultados do exemplo anterior para avaliar o erro aproximado da igualdade

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2 \quad \text{para} \quad x=0{,}2.$$

Resp. Inferior a $\frac{1}{2\cdot 10^3}$.

Elucidar a proveniência das igualdades aproximadas para baixos valores de x e avaliar o erro das igualdades:

58. $\operatorname{Log}\cos x\approx-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}$.

59. $\operatorname{tg} x\approx x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$.

60. $\operatorname{arc\,sen} x\approx x+\frac{x^3}{6}$

61. $\operatorname{arc\,tg} x \approx x - \frac{x^3}{3}$.

62. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

63. $\operatorname{Log}\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) \approx x - x^2 + \frac{5x^3}{6}$.

Utilizar a fórmula de Taylor para calcular o limite das expressões:

64. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$. **Resp.** 1.

65. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{Log}^2 (1 + x) - \operatorname{sen}^2 x}{1 - e^{-x^2}}$. **Resp.** 0.

66. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x) - x^3}{x^5}$. **Resp.** $\frac{1}{4}$.

67. $\lim\limits_{x \to 0} \left[x - x^2 \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$ **Resp.** 0.

68. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$. **Resp.** $\frac{1}{3}$.

69. $\lim \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$. **Resp.** $\frac{2}{3}$.

Capítulo V

ESTUDO DA VARIAÇÃO DAS FUNÇÕES

§ 1. Posição do problema.

O estudo das relações quantitativas entre os diversos fenómenos da natureza, leva-nos a procurar e a estudar o vínculo funcional existente entre as variáveis que caracterizam um dado fenómeno. Se este vínculo funcional puder ser expresso sob uma forma analítica, isto é, com o auxílio de uma ou de várias fórmulas, é-nos, então, possível iniciar o estudo desta dependência funcional pelos métodos da análise matemática. Por exemplo, após o estudo da trajectória dum projéctil lançado no vácuo, encontramos a fórmula

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

que exprime a relação funcional existente entre o alcance R, o ângulo de tiro α e a velocidade inicial v_0 (g é a aceleração da gravidade).

Graças a esta fórmula, é-nos possível determinar para que valores de α o alcance R será máximo ou mínimo, em que condições o aumento de α implicará o do alcance, etc.

Citemos um outro exemplo. O estudo das vibrações dum corpo repousando sobre molas (combóio, automóvel) fornece-nos uma fórmula exprimindo a dependência funcional entre o afastamento y deste corpo da posição de equilíbrio e o tempo t:

$$y = e^{-kt} (A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t).$$

As grandezas k, A, B, ω, que entram nesta fórmula, têm um valor bem determinado para um dado sistema vibratório (elas dependem da elasticidade das molas, do peso do corpo, etc., mas não variam com o tempo t) e, por conseguinte, podem ser consideradas como constantes.

A fórmula obtida permite concluir para que valores de t o afastamento y aumenta com t, como varia o valor do afastamento máximo com o tempo, a que valores de t correspondem estes afastamentos máximos, para que valores de t se obtêm as velocidades máximas de deslocamento do corpo, etc.

Todas as questões deste género se reduzem a um mesmo problema, mais geral, que se designa «O estudo da variação das funções».

É, evidentemente, difícil responder a todas estas questões calculando o valor numérico das funções em certos pontos (como o fizemos no Capítulo II). O objecto do presente capítulo é dar os princípios gerais do estudo da variação das funções.

§ 2. Crescimento e decrescimento das funções

Definimos, no § 6 do Capítulo I, as funções crescentes e decrescentes. Utilizaremos agora a noção de derivada para o estudo do crescimento e do decrescimento das funções.

Teorema — 1. *Se a função* f (x) *derivável sobre o segmento* [a, b] *é crescente sobre este segmento, então, a sua derivada não é negativa sobre este segmento, isto é,* $f'(x) \geqslant 0$.

2. *Se a função* f (x) *é contínua sobre o segmento* [a, b], *derivável no intervalo* (a, b) *e, mais, se* $f'(x) > 0$ *para* $a < x < b$, *então,* f (x) *é uma função crescente sobre o segmento* [a, b].

Demonstração — Demonstremos em seguida a primeira parte do teorema. Seja $f(x)$ uma função crescente sobre o segmento $[a, b]$. Atribuamos à variável independente x um crescimento Δx e consideremos o quociente

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Sendo $f(x)$ uma função crescente, tem-se:

$$f(x+\Delta x) > f(x) \quad \text{para} \quad \Delta x > 0$$

$$f(x+\Delta x) < f(x) \quad \text{para} \quad \Delta x < 0.$$

Nos dois casos

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0 \tag{2}$$

e, por conseguinte,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

isto é, $f'(x) \geqslant 0$, o que se queria demonstrar. [Se nós tivessemos $f'(x) < 0$; o quociente (1) seria negativo para os valores suficientemente pequenos de Δx, o que contradiria a relação (2).]

Demonstremos agora a segunda parte do teorema. Seja $f'(x) > 0$ para todos os x pertencentes ao intervalo (a, b).

Consideremos os dois valores arbitrários x_1 e x_2 ($x_1 < x_2$) da variável independente tomados sobre o segmento $[a, b]$.

Em virtude do teorema de Lagrange sobre os crescimentòs finitos, temos:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Por hipótese $f'(\xi) > 0$, por conseguinte, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, o que exprime bem que $f(x)$ é uma função crescente.

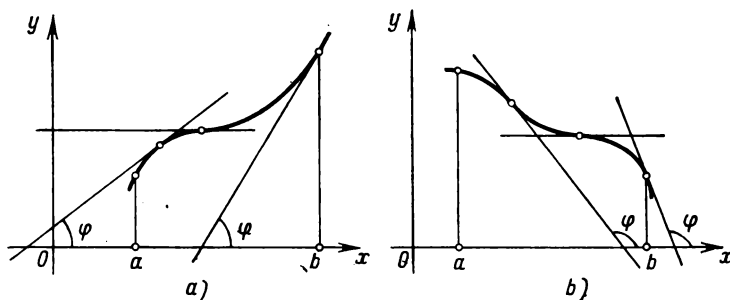



Fig. 97

Pode-se enunciar um teorema análogo para as funções decrescentes (deriváveis):

Se f (x) *é uma função decrescente sobre* [a, b], *então,* f' (x) $\leqslant$ 0 *sobre este segmento. Se* f' (x) < 0 *no intervalo* (a, b), *então,* f (x) *é decrescente sobre o segmento* [a, b]. [Bem entendido, supomos aqui, igualmente que a função $f(x)$ é contínua em qualquer ponto do segmento $[a, b]$ e derivável em qualquer ponto do intervalo (a, b).]

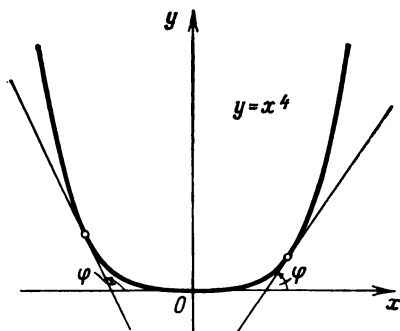



Fig. 98

Nota — O teorema que acabamos de demonstrar interpreta-se geomètricamente como se segue: se a função $f(x)$ é crescente sobre o segmento $[a, b]$, a tangente à curva $y = f(x)$ forma, em cada ponto deste intervalo, um *ângulo agudo* φ com o eixo Ox (em certos pontos ela pode ser paralela a este eixo). A tangente deste ângulo não é, pois, negativa: $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi \geqslant 0$ (fig. 97, *a*). Se a função $f(x)$ é decrescente sobre o segmento $[a, b]$, o ângulo formado pela tangente e o eixo Ox é *obtuso* (ou excepcionalmente, em certos pontos, a tangente

é paralela ao eixo Ox). A tangente deste ângulo não é, pois, positiva (fig. 97, *b*). A segunda parte do teorema interpreta-se da mesma maneira. Assim, este teorema permite concluir se a função é crescente ou decrescente, consoante o sinal da derivada.

Exemplo — Determinar o domínio de crescimento e de decrescimento da função

$$y = x^4.$$

Resolução — A derivada desta função é

$$y' = 4x^3;$$

para $x > 0$, tem-se $y' > 0$ e por consequência a função é crescente; para $x < 0$, tem-se $y' < 0$ e a função é decrescente (fig. 98).

§ 3. Máximo e mínimo das funções

Definição de máximo — Diz-se que a função $f(x)$ admite um *máximo* no ponto x_1, se o valor da função $f(x)$ é neste ponto maior que em qualquer outro ponto dum certo intervalo contendo o ponto x_1. Por outras palavras, a função $f(x)$ admite um *máximo* no ponto $x = x_1$, se $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ para todos os Δx (positivos ou negativos) suficientemente pequenos em valor absoluto (*).

Fig. 99

Por exemplo, a função $y = f(x)$, cujo gráfico está representado na figura 99, admite um máximo para $x = x_1$.

Definição de mínimo — Diz-se que a função $f(x)$ admite um mínimo para $x = x_2$, se

$$f(x_2 + \Delta x) > f(x_2),$$

para todos os Δx (positivos ou negativos) suficientemente pequenos em valor absoluto (fig. 99). Por exemplo, a função $y = x^4$, que consideramos no fim do precedente parágrafo (ver fig. 98), admite um mínimo para $x = 0$, visto que $y = 0$ para $x = 0$, e $y > 0$ para todos os outros valores de x.

Chamamos a atenção para os seguintes pontos relativos à definição do máximo e do mínimo.

1. Uma função definida sobre um segmento só pode atingir o seu máximo ou o seu mínimo num ponto interior deste segmento.

(*) Enuncia-se por vezes como esta definição: a função $f(x)$ admite um máximo no ponto x_1, se existe uma vizinhança (α, β) do ponto x_1 $(\alpha < x_1 < \beta)$ tal que para todos os pontos desta vizinhança diferentes de x_1 a desigualdade $f(x) < f(x_1)$ seja satisfeita.

2. Não se deve confundir o máximo e o mínimo duma função respectivamente com o seu maior valor e o seu menor valor (os limites superiores e inferiores) sobre o segmento considerado: o valor da função no ponto máximo apenas é o seu maior valor em relação aos seus valores nos pontos x, *suficientemente vizinhos* do ponto máximo. Do mesmo modo, num ponto mínimo, ela apenas é o menor valor da função em relação aos seus valores nos pontos *suficientemente vizinhos* do ponto mínimo. Eis porque, se emprega por vezes as expressões máximo relativo ou mínimo relativo, em vez de máximo e mínimo.

Assim, a figura 100, representa uma função definida sobre o segmento $[a, b]$, que tem

um máximo para $x = x_1$ e $x = x_3$;
um mínimo para $x = x_2$ e $x = x_4$;

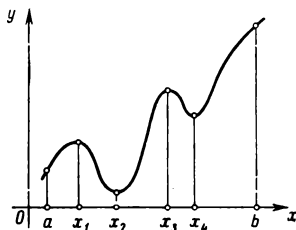



Fig. 100

mas o mínimo da função para $x = x_4$ é maior que o máximo desta função para $x = x_1$. Por outro lado, o valor da função para $x = b$ é maior que o valor desta função nos pontos de máximo.

Chama-se máximos e mínimos duma função aos *extremos* ou aos *valores extremais* desta função.

Os valores extremais duma função e as suas disposições sobre o segmento $[a, b]$, caracterizam, em certa medida, a variação da função em relação à variação da variável independente.

Indicaremos, de seguida, um método para achar os valores extremais.

Teorema — 1. (Condição necessária para a existência dum extremo). *Se a função derivável* $y = f(x)$ *tem um máximo ou um mínimo no ponto* $x = x_1$, *então, a sua derivada anula-se nesse ponto, isto é,* $f'(x_1) = 0$.

Demonstração — Suponhamos, para fixar ideias, que a função $y = f(x)$ tem um máximo no ponto $x = x_1$. Então, teremos para os Δx $(\Delta x \neq 0)$ suficientemente pequenos em valor absoluto

$$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1),$$

isto é,

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0.$$

Mas, então, o sinal do quociente

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

é determinado pelo sinal de Δx:

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}>0 \quad \text{para} \quad \Delta x<0,$$

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}<0 \quad \text{para} \quad \Delta x>0.$$

Resulta da definição de derivada que

$$f'(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}.$$

Se a derivada de $f(x)$ existe no ponto $x=x_1$, o limite do do membro direito não depende da maneira como Δx tende para zero (permanecendo positivo ou negativo).

Mas se $\Delta x\to 0$ permanecendo negativo, então,

$$f'(x_1)\geqslant 0.$$

Se $\Delta x\to 0$ permanecendo positivo, então,

$$f'(x_1)\leqslant 0.$$

Como $f'(x_1)$ é um número bem definido, não dependendo da maneira como Δx tende para zero, as duas desigualdades anteriores não são compatíveis, a não ser no caso em que

$$f'(x_1)=0.$$

Demonstrar-se-ia, duma maneira análoga, o teorema para o caso do mínimo.

O teorema assim demonstrado, traduz a propriedade geométrica seguinte: se a função $f(x)$ tem uma derivada no ponto máximo ou no ponto mínimo, a tangente à curva $y=f(x)$ nestes pontos, é paralela ao eixo Ox. Com efeito, resulta da relação $f'(x_1)=\operatorname{tg}\varphi=0$, em que φ é o ângulo formado pela tangente e o eixo Ox, que $\varphi=0$ (fig. 99).

Resulta imediatamente do teorema 1: *se a derivada da função* f(x) *existe para todos os valores considerados da variável independente, então, a função não pode ter um extremo (máximo ou mínimo) a não ser para os valores de* x *que anula a derivada.* O recíproco não é verdadeiro: *um ponto onde a derivada se anula não é necessàriamente um máximo ou um mínimo da função.*

Por exemplo, a derivada da função representada na figura 99 anula-se no ponto $x=x_3$ (a tangente é paralela ao eixo Ox), mas neste ponto não há nem máximo nem mínimo.

Do mesmo modo, a derivada da função $y = x^3$ (fig. 101) anula-se no ponto $x = 0$:

$$(y')_{x=0} = (3x^2)_{x=0} = 0,$$

mas, neste ponto, a função não tem nem máximo nem mínimo. Com efeito, por mais vizinho que seja o ponto x do ponto O, temos:

$$x^3 < 0 \quad \text{para} \quad x < 0$$

$$\text{e } x^3 > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Estudamos o caso duma função $f(x)$ derivável em qualquer ponto do seu domínio de definição. O que se poderá dizer a respeito

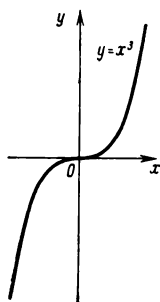
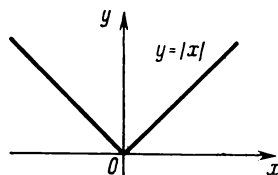



Fig. 101 Fig. 102

dos pontos onde a derivada não existe? Mostraremos, em exemplos, que nestes pontos a função pode ter um máximo ou um mínimo, mas pode igualmente não ter máximo nem mínimo.

Exemplo — 1. A função $y = |x|$ não tem derivada no ponto $x = 0$ (neste ponto a curva não tem tangente definida) mas ela tem um mínimo nesse ponto (fig. 102): $y = 0$ para $x = 0$ e em qualquer outro ponto x diferente de zero $y > 0$.

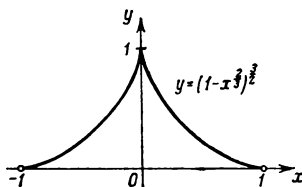
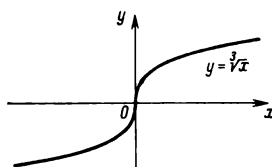



Fig. 103 Fig. 104

Exemplo — 2. A função $y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ não tem derivada no ponto $x = 0$, visto que $y' = -(1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}}$ se torna infinita quando x tende para zero; todavia ela admite um máximo neste ponto: $f(0) = 1$, $f(x) < 1$ quando x é diferente de 0 (fig. 103).

Exemplo — 3. A função $y = \sqrt[3]{x}$ não tem derivada no ponto $x = 0$ ($y' \to \infty$ para $x \to 0$). Neste ponto a função não tem máximo nem mínimo: $f(0) = 0$; $f(x) < 0$ para $x < 0$, $f(x) > 0$ para $x > 0$ (fig. 104).

Assim, uma função não pode ter extremo a não ser em dois casos: nos pontos em que a derivada existe e se anula, e nos pontos onde a derivada não existe.

Notemos que se num ponto a derivada não existe (mas existe numa certa vizinhança desse ponto), ela tem uma *descontinuidade* nesse ponto.

Os valores da variável independente, para os quais a derivada se anula ou tem uma descontinuidade, chamam-se *pontos críticos* ou *valores críticos*.

Resulta do que precede que todo o ponto crítico não é necessàriamente um extremo. Mas se a função tem um máximo ou um mínimo num certo ponto, este último é necessàriamente um ponto crítico. Eis porque se procede da seguinte maneira para determinar os extremos. Acha-se primeiro todos os pontos críticos, depois estuda-se cada ponto crítico separadamente, a fim de determinar se é um máximo, um mínimo da função ou se nem é um nem outro.

O estudo da função nos pontos críticos é baseado nos teoremas seguintes.

Teorema — 2. (Condições suficientes para a existência dum extremo). *Seja* f(x) *uma função contínua num intervalo contendo o ponto crítico* x_1 *e derivável em qualquer ponto desse intervalo (salvo, talvez, no ponto* x_1*). Se a derivada muda de sinal de mais para menos quando se passa pelo ponto crítico da esquerda para a direita, a função tem um máximo para* $x = x_1$. *Se a derivada muda de sinal de menos para mais quando se passa pelo ponto* x_1 *da esquerda para a direita, a função tem um mínimo nesse ponto.*

Assim,

$$\text{se} \quad a) \quad \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{para} \quad x < x_1, \\ f'(x) < 0 & \text{para} \quad x > x_1, \end{cases}$$

a função admite um *máximo* no ponto x_1;

$$\text{se} \quad b) \quad \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{para} \quad x < x_1, \\ f'(x) > 0 & \text{para} \quad x > x_1, \end{cases}$$

a função admite um *mínimo* no ponto x_1. Além disso, é preciso que as condições *a*) ou *b*) sejam satisfeitas para todos os valores de x suficientemente próximos de x_1, isto é, para todos os pontos duma vizinhança suficientemente pequena do ponto crítico x_1.

Demonstração — Suponhamos, primeiramente, que a derivada muda de sinal passando de mais para menos, isto é, que para todos os x suficientemente vizinhos do ponto x_1, temos:

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x < x_1,$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x > x_1.$$

Aplicando o teorema de Lagrange à diferença $f(x) - f(x_1)$, obtém-se:

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1),$$

em que ξ é um ponto compreendido entre x e x_1.

1. Seja $x < x_1$; então,

$$\xi < x_1, \quad f'(\xi) > 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

e, por conseguinte,

$$f(x) - f(x_1) < 0$$

ou

$$f(x) < f(x_1). \tag{1}$$

2. Seja $x > x_1$; então,

$$\xi > x_1, \quad f'(\xi) < 0, \quad f'(\xi)(x - x_1) < 0$$

e, por conseguinte,

$$f(x) - f(x_1) < 0$$

ou

$$f(x) < f(x_1). \tag{2}$$

As relações (1) e (2) mostram que para todos os valores de x, suficientemente vizinhos de x_1, o valor da função é menor que o valor da função no ponto x_1. Isto significa justamente que a função $f(x)$ admite um máximo no ponto x_1.

Demonstra-se, duma maneira análoga, a segunda parte deste teorema.

A figura 105 ilustra claramente a significação geométrica do teorema 2.

Suponhamos que $f'(x) = 0$ para $x = x_1$ e que para todos os outros valores de x suficientemente vizinhos de x_1, as desigualdades

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x < x_1,$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x > x_1$$

são satisfeitas.

Se para $x < x_1$ a tangente à curva forma com o eixo Ox um ângulo agudo, então, a função é crescente; e se para $x > x_1$ a tangente à curva forma com o eixo Ox um ângulo obtuso, a função é decrescente; no ponto $x = x_1$ a função que era crescente torna-se decrescente, por outras palavras, ela admite um máximo.

Suponhamos agora que $f'(x_2) = 0$ para $x = x_2$ e que para todos os outros valores de x suficientemente vizinhos de x_2, as desigualdades

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x < x_2,$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > x_2$$

são satisfeitas.

Se para $x < x_2$ a tangente à curva forma com o eixo Ox um ângulo obtuso, então, a função é decrescente; e se para $x > x_2$ a tangente à curva forma com o eixo Ox um ângulo agudo, então, a função é crescente. No ponto $x = x_2$ a função decrescente torna-se crescente, isto é, tem um mínimo.

Suponhamos que no ponto $x = x_3$ $f'(x_3) = 0$ e que para todos os valores de x_3, as desigualdades

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x < x_3,$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > x_3$$

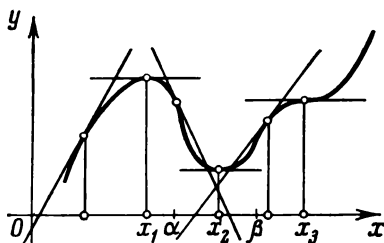
são satisfeitas.

Fig. 105

Então, a função é crescente para $x < x_3$ assim como para $x > x_3$. Por conseguinte, ela não tem máximo nem mínimo no ponto $x = x_3$. É justamente o que tem lugar para a função $y = x^3$ no ponto $x = 0$.

Com efeito, a derivada desta função é igual a $y' = 3x^2$, logo

$$(y')_{x=0} = 0, \quad (y')_{x<0} > 0, \quad (y')_{x>0} > 0.$$

Isto significa que a função não tem nem máximo nem mínimo no ponto $x = 0$ (ver fig. 101).

§ 4. Caminho a seguir para o estudo do máximo e do mínimo duma função derivável com o auxílio da derivada primeira

Referindo-nos ao parágrafo anterior, podemos enunciar a seguinte regra respeitante ao estudo do máximo e do mínimo duma função derivável

$$y = f(x).$$

1. Calcula-se a derivada primeira $f'(x)$ da função.

2. Procuram-se os valores críticos da variável independente x; para isso:

a) Procuram-se as raízes reais da equação obtida, igualando a zero a derivada primeira $f'(x) = 0$;

b) Procuram-se os valores de x para os quais a derivada $f'(x)$ tem descontinuidades.

3. Estuda-se o sinal da derivada à esquerda e à direita do ponto crítico. Como o sinal da derivada não muda no intervalo compreendido entre dois pontos críticos consecutivos, basta, estudar, por exemplo, o sinal da derivada à esquerda e à direita do ponto crítico x_2 (fig. 105), determinar o sinal da derivada no ponto α e β ($x_1 < \alpha < x_2$, $x_2 \leqslant \beta < x_3$, em que x_1 e x_3 são os pontos críticos vizinhos de x_2).

4. Calcula-se o valor da função $f(x)$ para cada valor crítico da variável independente.

Obtemos assim o esquema seguinte exprimindo os diferentes casos que se podem apresentar.

Sinal da derivada $f'(x)$ na vizinhança do ponto crítico x_1			Natureza do ponto crítico
$x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$	
+	$f'(x_1) = 0$ ou descontinuidade	—	Máximo
—	$f'(x_1) = 0$ ou descontinuidade	+	Mínimo
+	$f'(x_1) = 0$ ou descontinuidade	+	Nem máximo nem mínimo (a função é crescente)
—	$f'(x_1) = 0$ ou descontinuidade	—	Nem máximo nem mínimo (a função é decrescente)

Exemplo — 1. Achar os máximos e os mínimos da função

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1.$$

Resolução — 1. Calculemos a derivada primeira desta função:

$$y' = x^2 - 4x + 3.$$

2. Achemos as raízes reais da derivada:

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Por conseguinte,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

A derivada é sempre contínua; não há, pois, outro ponto crítico.

3. Estudemos os valores críticos e representemos os resultados na figura 106.

Estudemos o primeiro ponto crítico $x_1 = 1$. Como $y' = (x - 1)(x - 3)$, então,

$$\text{para } x < 1, \text{ temos } y' = (-)\cdot(-) > 0;$$
$$\text{para } x > 1, \text{ temos } y' = (+)\cdot(-) < 0.$$

Logo na vizinhança do ponto $x_1 = 1$ (quando se passa da esquerda para a direita) a derivada muda de sinal; ela passa de mais para menos.

A função admite, então, um máximo para $x = 1$. O valor da função neste ponto é:

$$(y)_{x=1} = \frac{7}{3}.$$

Estudemos o segundo ponto crítico $x_2 = 3$:

$$\text{para } x < 3, \text{ temos } y' = (+)\cdot(-) < 0;$$
$$\text{para } x > 3, \text{ temos } y' = (+)\cdot(+) > 0.$$

Isto significa que na vizinhança do ponto $x = 3$, a derivada muda de sinal; ela passa de menos para mais. A função tem, pois, um mínimo para $x = 3$. O valor da função neste ponto é:

$$(y)_{x=3} = 1.$$

Os resultados do nosso estudo permitem-nos construir o gráfico da função (fig. 106).

Fig. 106

Exemplo — 2. Achar os máximos e os mínimos da função

$$y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

Resolução — 1. Calculemos a derivada:

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

2. Achemos os valores críticos da variável independente: *a*) achemos os pontos onde a derivada se anula

$$y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0, \qquad x_1 = \frac{2}{5};$$

b) determinemos os pontos de descontinuidade da derivada (neste presente caso a função torna-se infinita). O ponto

$$x_2 = 0$$

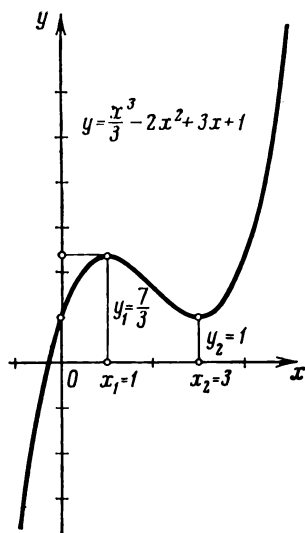
está evidentemente no número destes últimos. (Notemos que a função é definida e contínua no ponto $x_2 = 0$).

Não há outros pontos críticos.

3. Determinemos a natureza dos pontos críticos encontrados. Estudemos o ponto $x_1 = \frac{2}{5}$. Notemos que

$$(y')_{x<\frac{2}{5}} < 0, \qquad (y')_{x>\frac{2}{5}} > 0;$$

podemos, então, concluir que a função admite um mínimo no ponto $x = \frac{2}{5}$. O valor da função no ponto mínimo é igual a

$$(y)_{x=\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5}-1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$

Estudemos o segundo ponto crítico $x = 0$. Resulta de

$$(y)_{x<0>0}, \quad (y')_{x>0} < 0$$

que a função tem um máximo no ponto $x = 0$. Além disso, $(y)_{x=0} = 0$. O gráfico da função considerada está representado na figura 107.

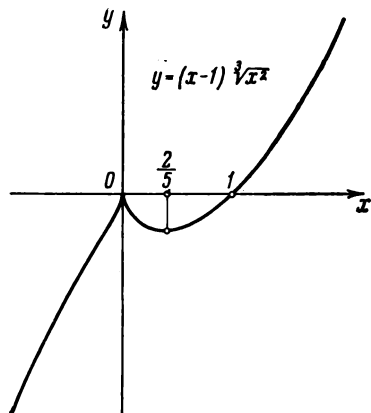



Fig. 107

§ 5. Estudo do máximo e do mínimo das funções com auxílio da derivada segunda

Seja $y = f(x)$ uma função cuja derivada se anula no ponto $x = x_1$, isto é, $f'(x_1) = 0$. Suponhamos, além disso, que a derivada segunda $f''(x)$ existe e é contínua numa vizinhança do ponto x_1. Podemos, então, enunciar o teorema seguinte.

Teorema — *Seja* $f'(x_1) = 0$; *então, a função tem um máximo no ponto* $x = x_1$ *se* $f''(x_1) < 0$ *e um mínimo se* $f''(x_1) > 0$.

Demonstração — Demonstremos, primeiramente, a primeira parte do teorema. Sejam

$$f'(x_1) = 0 \quad \text{e} \quad f''(x_1) < 0.$$

Sendo $f''(x)$, por hipótese, contínua numa certa vizinhança do ponto $x = x_1$, existe, evidentemente, um segmento suficientemente pequeno que contém o ponto x_1 em todo o ponto, no qual a derivada segunda $f''(x)$ é negativa.

Mas $f''(x)$ é derivada da derivada primeira $f''(x) = (f'(x))'$; eis porque resulta da condição $(f'(x))' < 0$ que a função $f'(x)$ é decrescente sobre o segmento que contém $x = x_1$ (§ 2, Cap. 5). Mas $f'(x) = 0$, por conseguinte, sobre este segmento temos $f'(x) > 0$ para $x < x_1$ e $f'(x) < 0$ para $x > x_1$, isto é, que a derivada $f'(x)$ muda o seu sinal de mais para menos quando se passa pelo ponto $x = x_1$. Isto significa precisamente que a função $f(x)$ tem um máximo no ponto x_1. A primeira parte do teorema está assim demonstrada.

Demonstra-se, duma maneira análoga, a segunda parte do teorema: se $f''(x_1) > 0$, então, $f''(x) > 0$ em todos os pontos dum certo segmento contendo o ponto x_1, logo sobre este segmento $f''(x) = (f'(x))' > 0$, e, por conseguinte, $f'(x)$ é crescente. Como $f'(x_1) = 0$, isso significa que passando pelo ponto x_1, a derivada $f'(x)$ muda

o seu sinal de menos para mais, por outras palavras, a função $f(x)$ tem um mínimo no ponto $x = x_1$.

Se no ponto crítico $f''(x_1) = 0$, a função pode, ou admitir neste ponto um máximo ou um mínimo, ou não ter extremo neste ponto. Em casos semelhantes, o estudo da função deverá ser feito segundo o primeiro método (ver § 4, Cap. 5).

O estudo dos extremos com o auxílio da derivada segunda pode ser esquematizado no quadro seguinte.

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Natureza do ponto crítico
0	—	Máximo n
0	+	Mínimo ı
0	0	Não determinada

Exemplo — 1. Determinar os máximos e os mínimos da função

$$y = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x.$$

Resolução — Sendo a função periódica (o período é igual a 2π), basta estudar o comportamento da função sobre o segmento $[0, 2\pi]$.

1. Calculemos a derivada:

$$y' = 2 \cos x - 2 \operatorname{sen} 2x = 2 (\cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x) = 2 \cos x (1 - 2 \operatorname{sen} x).$$

2. Achemos os valores críticos da variável independente:

$$2 \cos x (1 - 2 \operatorname{sen} x) = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}; \quad x_2 = \frac{\pi}{2}; \quad x_3 = \frac{5\pi}{6}; \quad x_4 = \frac{3\pi}{2}$$

3. Calculemos a derivada segunda:

$$y'' = -2 \operatorname{sen} x - 4 \cos 2x.$$

4) Determinemos a natureza de cada ponto crítico:

$$(y'')_{x=\frac{\pi}{6}} = -2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Por conseguinte, temos um máximo no ponto $x_1 = \frac{\pi}{6}$:

$$(y)_{x=\frac{\pi}{6}} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Por outro lado,

$$(y'')_{x=\frac{\pi}{2}} = -2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 2 > 0.$$

Por conseguinte, a função tem um mínimo no ponto $x_2 = \frac{\pi}{2}$:

$$(y)_{x=\frac{\pi}{2}} = 2\cdot 1 - 1 = 1.$$

No ponto $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ temos:

$$(y'')_{x=\frac{5\pi}{6}} = -2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{2} = -3 < 0.$$

Por conseguinte, a função tem um máximo no ponto $x_3 = \frac{5\pi}{6}$:

$$(y)_{x=\frac{5\pi}{6}} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Finalmente

$$(y'')_{x=\frac{3\pi}{2}} = -2(-1) - 4(-1) = 6 > 0.$$

Por conseguinte, a função tem um mínimo no ponto $x_4 = \frac{3\pi}{2}$:

$$(y)_{x=\frac{3\pi}{2}} = 2(-1) - 1 = -3.$$

O gráfico da função considerada está representado na figura 108.

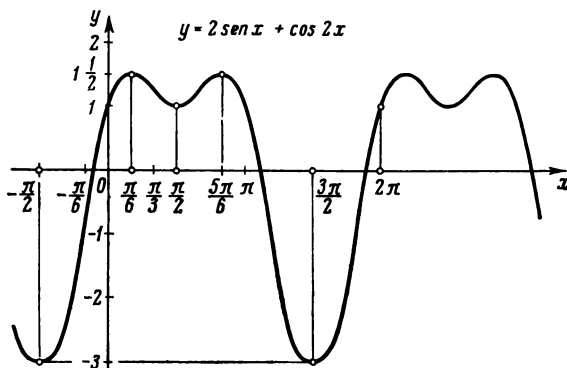



Fig. 108

Mostremos, com exemplos, que se $f'(x_1) = 0$ e $f''(x_1) = 0$, a função pode ter no ponto x_1 ou um máximo ou um mínimo, ou não ter qualquer extremo.

Exemplo — 2. Determinar os máximos e os mínimos da função:

$$y = 1 - x^4.$$

Resolução — 1. Achemos os pontos críticos:

$$y' = -4x^3, \quad -4x^3 = 0, \quad x = 0.$$

2. Determinemos o sinal da derivada segunda no ponto $x = 0$:

$$y'' = -12x^2, \quad (y'')_{x=0} = 0.$$

Por conseguinte, não podemos, neste caso, determinar a natuzera do ponto crítico considerado com o auxílio do sinal da derivada segunda.

3. Estudemos a natureza do ponto crítico empregando o primeiro método (ver § 4, Cap. V).

$$(y')_{x<0} > 0, \quad (y)_{x>0} < 0.$$

A função tem, pois, um máximo no ponto $x = 0$. O valor da função neste ponto é:

$$(y)_{x=0} = 1.$$

O gráfico da função considerada está representado na figura 109.

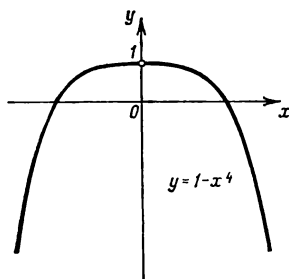
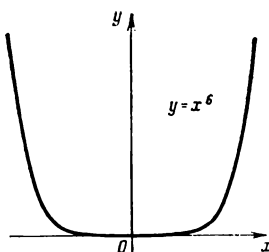
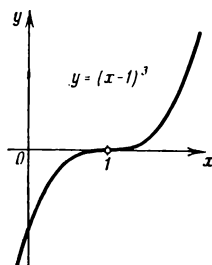



Fig. 109 Fig. 110 Fig. 111

Exemplo — 3. Determinar os máximos e os mínimos da função:

$$y = x^6.$$

Resolução — Procedendo de acordo com o segundo método, encontramos:

1) $y' = 6x^5$, $y' = 6x^5 = 0$, $x = 0$; 2) $y'' = 30x^4$, $(y'')_{x=0} = 0$.

O segundo método não permite, pois, julgar da natureza dos pontos críticos. O emprego do primeiro método impõe-se:

$$(y')_{x<0} < 0, \quad (y')_{x>0} > 0.$$

Por conseguinte, a função tem um mínimo no ponto $x = 0$ (fig. 110).

Exemplo — 4. Achar os máximos e os mínimos da função:

$$y = (x-1)^3.$$

Resolução — Segundo método:

$$y' = 3(x-1)^2, \; 3(x-1)^2 = 0, \; x = 1;$$

$$y'' = 6(x-1), \; (y'')_{x=1} = 0;$$

assim, o emprego do primeiro método impõe-se, visto que o segundo método é ineficaz:

$$(y')_{x<1} > 0, \quad (y')_{x>1} > 0.$$

Por conseguinte, a função não tem nem máximo nem mínimo no ponto $x = 1$ (fig. 111).

§ 6. Maior e menor valor duma função sobre um segmento

Seja $y = f(x)$ uma função contínua sobre um segmento $[a, b]$. Ela atinge, então, sobre este segmento o seu maior valor e o seu menor valor (ver § 10, Cap. II). Suponhamos que esta função tem um número finito de pontos críticos sobre este segmento. Se o maior valor é atingido no interior do segmento $[a, b]$, ele identificar-se-á, evidentemente, com um dos máximos da função (se houver vários máximos), mais precisamente, com o maior destes máximos. Mas pode igualmente suceder que o maior valor seja atingido numa das extremidades do segmento considerado.

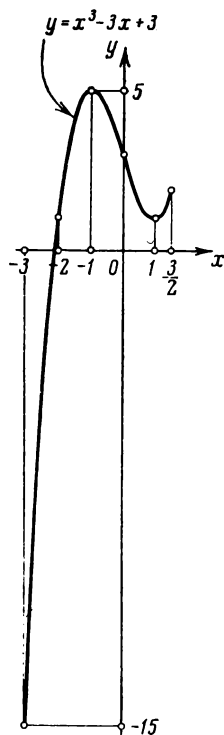



Fig. 112

Assim, sobre o segmento $[a, b]$ a função $f(x)$ atinge o seu maior valor, quer numa das extremidades do segmento considerado, quer num dos pontos críticos interiores que é precisamente um máximo.

Este raciocínio aplica-se igualmente ao menor valor duma função definida num dado intervalo; ele é atingido quer numa das extremidades do segmento, quer num dos pontos críticos interiores que é um mínimo.

Resulta do precedente a seguinte regra: para calcular o maior valor duma função contínua sobre o segmento $[a, b]$ procede-se do seguinte modo:

1) procura-se todos os máximos da função sobre o segmento considerado;

2) determina-se o valor da função nas extremidades do segmento calculando-se $f(a)$ e $f(b)$;

3) escolhe-se o maior destes valores; ele será justamente o maior valor da função sobre o segmento considerado.

Proceder-se-á duma maneira semelhante para determinar o menor valor duma função sobre um dado segmento.

Exemplo — Determinar o maior e o menor valor da função $y = x^3 - 3x + 3$ sobre o segmento $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$.

Resolução — 1. Achemos os máximos e os mínimos da função sobre o segmento $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$:

$$y' = 3x^2 - 3, \quad 3x^2 - 3 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1,$$
$$y'' = 6x, \quad (y'')_{x=1} = 6 > 0.$$

Por conseguinte, a função tem um mínimo no ponto $x = 1$:

$$(y)_{x=1} = 1.$$

Por outro lado,

$$(y'')_{x=-1} = -6 < 0.$$

Por conseguinte, a função tem um máximo no ponto $x = -1$:

$$y_{x=-1} = 5.$$

2. Calculemos o valor da função nas extremidades do intervalo:

$$(y)_{x=\frac{3}{2}} = \frac{15}{8}, \quad (y)_{x=-3} = -15.$$

O maior valor da função considerada sobre o segmento $\left[-3;\ \frac{3}{2}\right]$ é:

$$(y)_{x=-1} = 5,$$

o seu menor valor é:

$$(y)_{x=-3} = -15.$$

O gráfico da função considerada, está representado na figura 112.

§ 7. Aplicação da teoria do máximo e do mínimo das funções na resolução de problemas

A teoria do máximo e do mínimo das funções permite resolver numerosos problemas de geometria, de mecânica, etc. Consideremos alguns problemas desta natureza.

Fig. 113

Problema — 1. O alcance da trajectória $R = OA$ (fig. 113) dum projéctil lançado (no vácuo) com uma velocidade inicial v_0 sob um ângulo φ com o horizonte é dado pela fórmula

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g}$$

(sendo g a aceleração da gravidade). Para uma dada velocidade inicial v_0, determinar para que valor do ângulo φ o alcance da trajectória será máximo.

Resolução — A grandeza R é uma função do ângulo φ.

Estudemos os máximos desta função sobre o segmento $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}; \quad \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g} = 0;$$

$$\text{o valor crítico é } \varphi = \frac{\pi}{4};$$

por outro lado,

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} = -\frac{4v_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g}; \quad \left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = -\frac{4v_0^2}{g} < 0.$$

A função R apresenta, por conseguinte, um máximo para o valor $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$$(R)_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Os valores da função R nas extremidades do segmento $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ são:

$$(R)_{\varphi=0} = 0, \qquad (R)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

O máximo achado é o maior valor de R.

Problema — 2. Quais devem ser as dimensões dum cilindro de volume v para que a sua superfície total S seja mínima.

Resolução — Designando por r o raio da base do cilindro e por h a altura, temos:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Sendo dado o volume, h exprime-se em função de r pela fórmula

$$v = \pi r^2 h,$$

donde

$$h = \frac{v}{\pi r^2}.$$

Substituindo este valor de h na expressão de S, temos:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{v}{\pi r^2}$$

ou

$$S = 2\left(\pi r^2 + \frac{v}{r}\right).$$

v é aqui um número dado. Por conseguinte, exprimimos S em função duma só variável independente r.

Achemos o menor valor desta função no intervalo $0 < r < \infty$:

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(2\pi r - \frac{v}{r^2}\right),$$

$$2\pi r - \frac{v}{r^2} = 0, \qquad r_1 = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}},$$

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{r=r_1} = 2\left(2\pi + \frac{2v}{r^3}\right)_{r=r_1} > 0.$$

Por conseguinte, a função S tem um mínimo no ponto $r = r_1$. Notemos que $\lim\limits_{r \to 0} S = \infty$ e $\lim\limits_{r \to \infty} S = \infty$, isto é, que a superfície total se torna infinita para $r \to 0$ ou $r \to \infty$. Concluímos, pois, que a função S atinge o *seu menor valor* no ponto $r = r_1$.

Mas, se $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, então,

$$h = \frac{v}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}} = 2r.$$

Daí resulta que a área total dum cilindro, para um dado volume, será mínimo se a altura do cilindro for igual ao diâmetro da base.

§ 8. Estudo dos máximos e dos mínimos duma função com o auxílio da fórmula de Taylor

Indicamos, no § 5 do Capítulo V, que se no ponto $x = a$, $f'(a) = 0$ e $f''(a) = 0$, a função pode ter ou um máximo, ou um mínimo neste ponto, mas pode igualmente não ter extremo. Em casos semelhantes recomendamos determinar os extremos estudando o comportamaento da derivada primeira à esquerda e à direita do ponto crítico $x = a$.

Vamos mostrar agora como esta questão pode ser resolvida com o auxílio da fórmula de Taylor (§ 6, Cap. IV).

Suponhamos que, não sòmente $f''(x)$, mas também as derivadas sucessivas da função $f(x)$, até à ordem n, inclusivé, se anulam no ponto $x = a$:

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0, \qquad (1)$$

mas que

$$f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

Suponhamos, além disso, que as derivadas da função $f(x)$ de ordem $n+1$, inclusivé, são contínuas na vizinhança do ponto $x = a$.

Tendo em conta (1), a fórmula de Taylor para a função $f(x)$ tomará a forma:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \qquad (2)$$

em que ξ é um número compreendido entre a e x.

Como $f^{(n+1)}(x)$ é contínua na vizinhança do ponto a e que $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, existe um número positivo h, bastante pequeno, tal que para todo x satisfazendo a desigualdade $|x - a| < h$ se tem $f^{(n+1)}(x) \neq$ $\neq 0$. Mais, se $f^{(n+1)}(a) > 0$, teremos $f^{(n+1)}(x) > 0$ em qualquer ponto do intervalo $(a - h,\ a + h)$; se $f^{(n+1)}(a) < 0$ teremos $f^{(n+1)}(x) < 0$ em qualquer ponto deste intervalo.

Ponhamos a fórmula (2) sob a forma

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \qquad (2')$$

e consideremos diferentes casos.

Primeiro caso — n é ímpar.

a) Seja $f^{(n+1)}(a) < 0$. Então, existe um intervalo $(a - h,\ a + h)$ em que a derivada $(n+1)$ é negativa em cada ponto. Se x é um ponto deste intervalo, ξ está igualmente compreendido entre $a - h$ e $a + h$ e, por conseguinte, $f^{(n+1)}(\xi) < 0$. Sendo $n + 1$ um número par, $(x - a)^{n+1} > 0$ para $x \neq a$ e deste modo o membro direito da fórmula (2′) é negativo.

Por conseguinte, para $x \neq a$ temos em qualquer ponto do intervalo $(a - h,\ a + h)$:

$$f(x) - f(a) < 0;$$

o que significa que a função tem um máximo no ponto $x = a$.

b) Seja $f^{(n+1)}(a) > 0$. Neste caso, para h suficientemente pequeno temos $f^{(n+1)}(\xi) > 0$ em todo o ponto x do intervalo $(a - h,\ a + h)$.

Por conseguinte, o membro direito da fórmula (2′) é positivo, isto é, que em todo o ponto do intervalo considerado teremos:

$$f(x) - f(a) > 0,$$

o que significa que a função tem um mínimo no ponto $x = a$.

Segundo caso — n é par.

Então $n+1$ é ímpar e a quantidade $(x-a)^{n+1}$ tem diferentes sinais, consoante seja $x < a$ ou $x > a$.

Se h é suficientemente pequeno em valor absoluto, a derivada $(n+1)$ conserva em todo o ponto do intervalo $(a-h, a+h)$ o mesmo sinal que no ponto a. Resulta daí que $f(x) - f(a)$ têm diferentes sinais conforme seja $x < a$ ou $x > a$. Isto significa precisamente que a função não tem extremo no ponto $x = a$.

Notemos que se para n par $f^{(n+1)}(a) > 0$, então, $f(x) < f(a)$ para $x < a$ e $f(x) > f(a)$ para $x > a$.

Se para n par $f^{(n+1)}(a) < 0$, então, $f(x) > f(a)$ para $x < a$ e $f(x) < f(a)$ para $x > a$.

Pode-se enunciar os resultados obtidos da maneira seguinte.

Se se tem para $x = a$:

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$$

e se a primeira derivada $f^{n+1}(a)$ que não se anula no ponto a é de ordem par, então,

$$f(x) \text{ tem um } \textit{máximo} \text{ no ponto } a \text{ se } f^{(n+1)}(a) < 0;$$

$$f(x) \text{ tem um } \textit{mínimo} \text{ no ponto a se } f^{(n+1)}(a) > 0.$$

Se a primeira derivada que não se anula no ponto a é de ordem *ímpar*, a função não tem extremo neste ponto. Além disso,

$$f(x) \text{ é crescente se } f^{(n+1)}(a) > 0;$$

$$f(x) \text{ é } \textit{decrescente} \text{ se } f^{(n+1)}(a) < 0.$$

Exemplo — Achar os máximos e os mínimos da função:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Resolução — Procuremos os valores críticos da função:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1).$$

Encontramos a equação:

$$4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

em que o único ponto crítico é:

$$x = 1$$

(pois esta equação apenas tem uma única raíz real).

Determinemos a natureza do ponto crítico $x = 1$:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 0 \quad \text{para } x = 1.$$

$$f'''(x) = 24x - 24 \quad = 0 \quad \text{para } x = 1,$$

$$f^{IV}(x) = 24 > 0 \quad \text{qualquer que seja } x.$$

Por conseguinte, a função $f(x)$ tem um mínimo no ponto $x = 1$.

§ 9. Convexidade e concavidade das curvas. Pontos de inflexão

Consideremos no plano uma curva $y = f(x)$ cujo gráfico é o duma função unívoca e derivável.

Definição — 1. Diz-se que a curva tem a sua *convexidade voltada no sentidos dos y positivos* no intervalo (a, b) se todos os pontos da curva se encontram por baixo da tangente em qualquer um dos pontos desta curva nesse intervalo.

Diz-se que a curva tem a sua *convexidade voltada para os y negativos* no intervalo (b, c), se todos os pontos desta curva se encontram por cima da tangente em qualquer um dos pontos desta curva nesse intervalo.

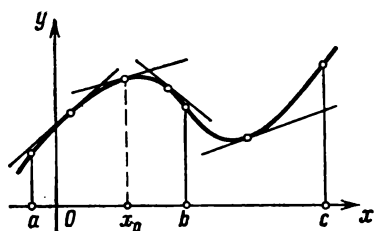



Fig. 114

Diz-se que uma curva, cuja convexidade está voltada para os y positivos, é uma curva *convexa*; de igual modo diz-se que uma curva, cuja convexidade está voltada para os y negativos, é uma curva *côncava*.

Dá-se na figura 114 uma curva que é convexa no intervalo (a, b) e côncava no intervalo (b, c).

A orientação da convexidade é uma característica importante da forma da curva. Neste parágrafo determinaremos os critérios que permitem definir a orientação da convexidade da curva representativa da função $y = f(x)$ em diversos intervalos.

Demostremos o seguinte teorema.

Teorema — 1. *Se a derivada segunda da função* f (x) *é negativa em qualquer ponto do intervalo* (a, b), *isto é, se* $f''(x) < 0$, *a curva* $y = f(x)$ *tem, então, a sua convexidade voltada para os* y *positivos (a curva é convexa) neste intervalo.*

Demonstração — Escolhamos um ponto arbitrário $x = x_0$ no intervalo (a, b) (fig. 114) e tracemos a tangente à curva no ponto da abcissa $x = x_0$. O teorema ficará demonstrado se provarmos que todos os pontos da curva neste intervalo estão dispostos por baixo da tangente, ou, por outras palavras, se a ordenada dum ponto arbitrário da curva $y = f(x)$ é menor que a ordenada y da tangente para um mesmo valor de x.

A equação da curva é

$$y = f(x). \tag{1}$$

A equação da tangente à curva no ponto $x = x_0$ é

$$\bar{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ou

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Resulta das equações (1) e (2) que a diferença das ordenadas da curva e da tangente correspondente a um mesmo valor de x é igual a

$$y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Apliquemos o teorema de Lagrange à diferença $f(x) - f(x_0)$:

$$y - \bar{y} = f'(c) \cdot (x - x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

(em que c está compreendido entre x_0 e x); então,

$$y - \bar{y} = [f'(c) - f'(x_0)](x - x_0).$$

Apliquemos de novo o teorema de Lagrange à expressão entre parêntesis; então,

$$y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

(em que c_1 está compreendido entre x_0 e c).

Consideremos, primeiramente, o caso $x > x_0$. Neste caso $x_0 < < c < x$; dado que

$$x - x_0 > 0, \qquad c - x_0 > 0$$

e que, por hipótese,

$$f''(c_1) < 0,$$

resulta da igualdade (3) que $y - \bar{y} < 0$.

Consideremos agora o caso $x < x_0$. Neste caso $x < c < c_1 < x_0$ e $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$; mas, como por hipótese, $f''(c_1) < 0$, resulta da igualdade (3) que

$$y - \bar{y} < 0.$$

Assim demonstramos que cada ponto da curva se encontra por baixo da tangente à curva neste ponto quaisquer que sejam os valores de x e de x_0 no intervalo (a, b). Isto significa justamente que a curva é convexa. O teorema está demonstrado.

Demonstra-se duma maneira análoga o teorema seguinte.

Teorema — 1'. *Se a derivada segunda da função* f (x) *é positiva em cada ponto do intervalo* (b, c), *isto é, se* f'' (x) > 0, *a curva* y = f (x) *tem, então, a sua convexidade voltada para os* y *negativos nesse inter-tervalo (a curva é côncava).*

Nota — Os teoremas 1 e 1' podem ser interpretados geomètricamente da maneira seguinte. Consideremos uma curva $y = f(x)$ cuja convexidade está voltada para os y positivos no intervalo (a, b) (fig. 115).

A derivada $f'(x)$ é igual à tangente do ângulo α formado pela tangente à curva no ponto de abcissa x e o eixo Ox; por outras palavras, $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$. Eis porque $f''(x) = [\operatorname{tg} \alpha]'_x$. Se $f''(x) < 0$ para todo o x do intervalo (a, b), então, $\operatorname{tg} \alpha$ decresce para x crescente. Geomètri-

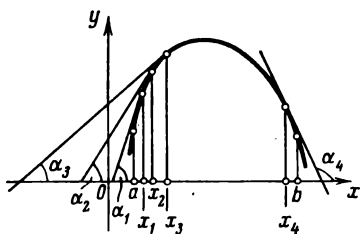
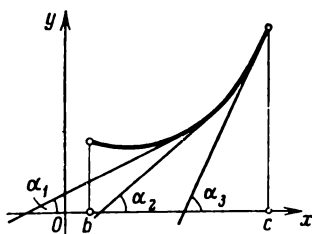



Fig. 115 Fig. 116

camente é evidente que se $\operatorname{tg} \alpha$ decresce para x crescente, a curva correspondente é convexa. O teorema 1 dá a demonstração analítica desta propriedade geométrica.

O teorema 1' é susceptível duma interpretação geométrica análoga (fig. 116).

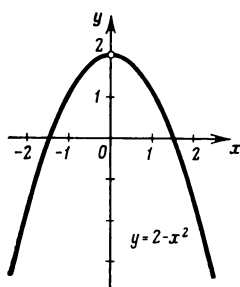
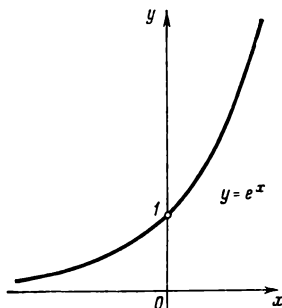
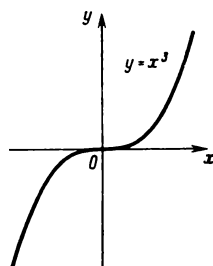



Fig. 117 Fig. 118 Fig. 119

Exemplo — 1. Determinar os intervalos de convexidade e de concavidade da curva

$$y = 2 - x^2.$$

Resolução — A derivada segunda

$$y'' = -2 < 0$$

para todos os valores de x. Por conseguinte, a convexidade da curva é sempre orientada para cima (a curva é sempre convexa) (fig. 117).

Exemplo — 2. Seja $y = e^x$.

Como

$$y'' = e^x > 0$$

para todos os valores de x, a curva é côncava, isto é, a sua convexidade está orientada para baixo (fig. 118).

Exemplo — 3. Seja a curva definida pela equação

$$y = x^3.$$

Como

$$y'' = 6x,$$

$y'' < 0$ para $x < 0$ e $y'' > 0$ para $x > 0$. Por conseguinte, a curva tem a sua convexidade orientada para cima para $x < 0$ e para baixo para $x > 0$ (fig. 119).

Definição — 2. Chama-se *ponto de inflexão* ao ponto que separa a parte convexa duma curva contínua da sua parte côncava.

Os pontos O, A e B das figuras 119, 120 e 121 são pontos de inflexão.

É evidente que num ponto de inflexão a tangente *atravessa* a curva, visto que dum lado deste ponto a curva está disposta *por baixo* da tangente e do outro lado *por cima*.

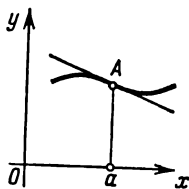
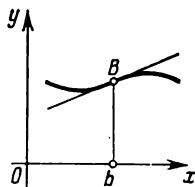



Fig. 120 Fig. 121

Estabeleçamos agora as condições suficientes para que um ponto da curva seja um ponto de inflexão.

Teorema — 2. *Seja* $y = f(x)$ *a equação da curva. Se* $f''(a) = 0$ *ou se* $f''(a)$ *não existe e a derivada segunda* $f''(x)$ *muda de sinal passando pelo valor* $x = a$, *o ponto da curva da abcissa* $x = a$ *é um ponto de inflexão.*

Demonstração — 1. Seja $f''(x) < 0$ para $x < a$ e $f''(x) > 0$ para $x > a$.

Então, a convexidade da curva está voltada para os y positivos para $x < a$ e para os y negativos para $x > a$. Por conseguinte, o ponto A da curva da abcissa $x = a$ é um ponto de inflexão (fig. 120)

2. Se $f''(x) > 0$ para $x < b$ e $f''(x) < 0$ para $x > b$, a curva tem a sua convexidade voltada para os y negativos para $x < b$ e para os y positivos para $x > b$. Por conseguinte, o ponto B da curva de abcissa $x = b$ é um ponto de inflexão (ver (fig. 121).

Exemplo — 4. Achar os pontos de inflexão e determinar os intervalos de convexidade e de concavidade da curva

$$y = e^{-x^2} \text{ (curva de Gauss).}$$

Resolução — 1. Calculemos as derivadas primeira e segunda:

$$y' = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

2. A derivada segunda existe sempre. Achemos os valores de x para os quais $y'' = 0$

$$2e^{-x^2}(2x^2-1)=0,$$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Estudemos os valores obtidos:

$$\text{para } x < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{tem-se } y'' > 0,$$

$$\text{para } x > -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{tem-se } y'' < 0;$$

a derivada segunda muda de sinal na vizinhança do ponto x_1. Por conseguinte, o ponto da curva de abcissa $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ é um ponto de inflexão. As coordenadas deste ponto são: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

$$\text{para } x < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{tem-se } y'' < 0,$$

$$\text{para } x > \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{tem-se } y'' > 0.$$

Por conseguinte, para $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a curva tem igualmente um ponto de inflexão. As coordenadas deste ponto são: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Por outro lado, a existência deste segundo ponto de inflexão, resulta imediatamente da simetria da curva em relação ao eixo Oy.

4. Resulta do que se acaba de dizer que

a curva é côncava para $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

a curva é convexa para $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\frac{1}{\sqrt{2}}$,

a curva é côncava para $+\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$.

5. Resulta da expressão da derivada primeira

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

que

para $x < 0$ se tem $y' > 0$, logo a função é crescente;
para $x > 0$ se tem $y' < 0$, logo a função é decrescente;
para $x = 0$ se tem $y' = 0$.

A função tem um máximo neste ponto, a saber $y = 1$.

Agora é fácil graças aos resultados obtidos, traçar o gráfico desta função (fig. 122).

Exemplo — 5. Achar os pontos de inflexão da curva

$$y = x^4.$$

Resolução — 1. Calculemos a derivada segunda:

$$y'' = 12x^2.$$

2. Determinemos as raízes da equação $y'' =$

$$12x^2 = 0, \quad x = 0.$$

3. Estudemos o valor obtido $x = 0$

para $x < 0$, tem-se $y'' > 0$, a curva é côncava;
para $x > 0$, tem-se $y'' > 0$, a curva é convexa.

Por conseguinte, a curva não tem ponto de inflexão (fig. 123).

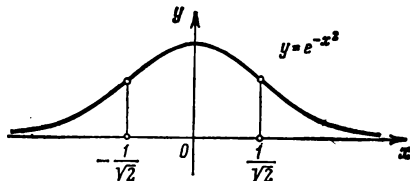



Fig. 122

Exemplo — 6. Achar os pontos de inflexão da curva

$$y = (x-1)^{\frac{1}{3}}.$$

Resolução — 1. Calculemos as derivadas primeira e segunda:

$$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}; \quad y'' = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}.$$

2. A derivada segunda não se anula em nenhum ponto, mas ela não existe para $x = 1$ ($y'' = \pm\infty$).

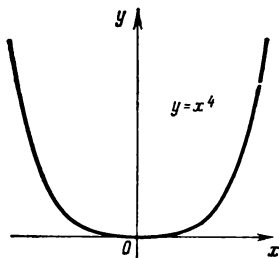



Fig. 123

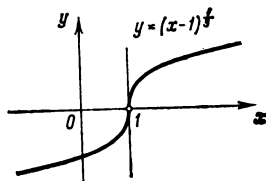



Fig. 124

3. Estudemos o valor $x = 1$

para $x < 1$, tem-se $y'' > 0$, a curva é côncava;
para $x > 1$, tem-se $y'' < 0$, a curva é convexa.

A curva tem, pois, um ponto de inflexão para $x = 1$. É o ponto (1; 0).
Notemos que $y' = \infty$ para $x = 1$, isto é, que a tangente à curva neste ponto é paralela ao eixo Oy (fig. 124).

§ 10. Assímptotas

Acontece frequentemente ter-se que estudar a forma da curva $y = f(x)$ e, por conseguinte, o comportamento da função quando as coordenadas dum ponto variável da curva *tendam para o infinito* (em valor absoluto). No decurso dum tal estudo, um caso particular nos retém sobretudo a atenção. É aquele em que a curva considerada se aproxima indefinidamente duma dada recta, quando um ponto variável tomado sobre esta curva tende para o infinito (*).

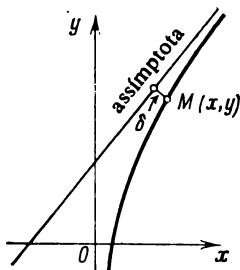
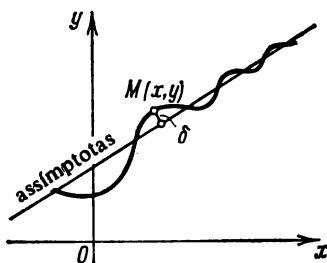



Fig. 125 Fig. 126

Definição — A recta A chama-se assímptota duma curva, se a distância δ dum ponto variável M da curva a esta recta tende para zero, quando o ponto M tende para o infinito (fig. 125 e 126).

Na sequência, distinguiremos as assímptotas *paralelas* (isto é, paralelas ao eixo das ordenadas) e *oblíquas* (isto é, não paralelas ao eixo das ordenadas).

I. *Assímptotas paralelas* ao eixo Oy.

Resulta da definição de assímptota que se $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, então, a recta $x = a$ é uma assímptota da curva $y = f(x)$. Inversamente, se a recta $x = a$ é uma assímptota a esta curva, então, uma das igualdades anteriores é satisfeita.

Por conseguinte, para determinar as assímptotas paralelas ao eixo Oy, é necessário achar os valores $x = a$ para os quais a função $y = f(x)$ tende para o infinito quando $x \to a$. Se um tal valor de x existe, a recta $x = a$ será uma assímptota da curva paralela ao eixo Oy.

(*) Diz-se que o ponto variável M tomado sobre a curva tende para o infinito, se a distância deste ponto da origem das coordenadas aumenta indefinidamente.

Exemplo — 1. A curva $y = \frac{2}{x-5}$ tem uma assímptota paralela ao eixo Oy, é a recta $x = 5$, visto que $y \to \infty$ para $x \to 5$ (fig. 127).

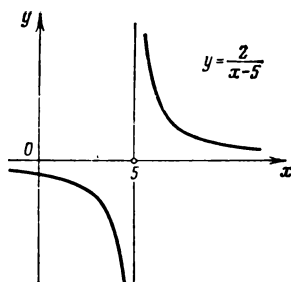



Fig. 127

Exemplo — 2. A curva $y = \operatorname{tg} x$ tem uma infinidade de assímptotas paralelas ao eixo Oy. São as rectas

$$x = \pm \frac{\pi}{2}, \quad x = \pm \frac{3\pi}{2}, \quad x = \pm \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

Isto resulta de $\operatorname{tg} \to \infty$ quando x tende para um dos valores

$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ ou

$$-\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{5\pi}{2}, \ldots \text{ (fig. 128).}$$

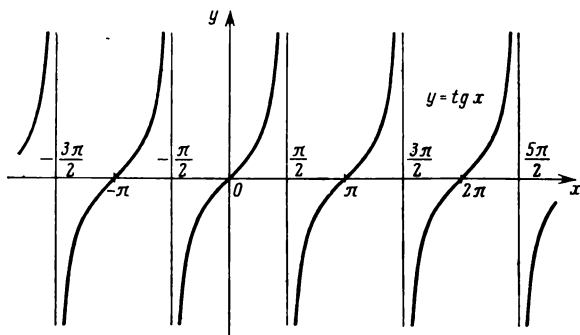



Fig. 128

Exemplo — 3. A recta $x = 0$ é uma assímptota paralela ao eixo Oy para a curva $y = e^{\frac{1}{x}}$ visto que $\lim\limits_{x \to +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ (fig. 129).

II. *As assímptotas oblíquas.*

Suponhamos que a curva $y = f(x)$ tem uma assímptota oblíqua cuja equação é

$$y = kx + b. \tag{1}$$

Determinemos os números k e b (fig. 130). Seja $M(x, y)$ um ponto da curva e $N(x, y)$ um ponto da assímpota.

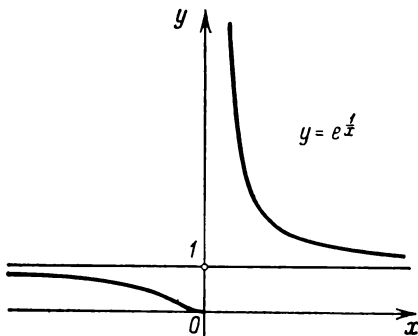
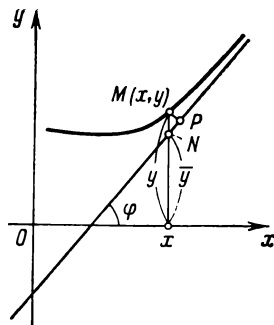



Fig. 129 Fig. 130

O comprimento do segmento MP é igual à distância do ponto M à assímptota. Por hipótese

$$\lim_{x \to +\infty} MP = 0. \tag{2}$$

Designemos por φ o ângulo formado pela assímptota e o eixo Ox. Resulta do triângulo NMP que

$$NM = \frac{MP}{\cos \varphi}$$

sendo φ um ângulo constante $\left(\text{diferente de } \frac{\pi}{2}\right)$, resulta da igualdade anterior que

$$\lim_{x \to +\infty} NM = 0, \tag{2'}$$

e inversamente, da igualdade (2') resulta a igualdade (2). Mas

$$NM = |QM - QN| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|,$$

e a igualdade (2') se transforma em

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx - b] = 0. \tag{3}$$

Assim, se a recta (1) é uma assímptota, a igualdade (3) é verificada, e reciprocamente, se as constantes k e b verificam a igualdade (3), a recta $y = kx + b$ é uma assímptota.

Determinemos agora k e b. Pondo x em factor na igualdade (3), temos:

$$\lim_{x \to +\infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

Como $x \to +\infty$, devemos ter

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

Mas como b é constante, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{b}{x} = 0$. Por conseguinte,

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k \right] = 0,$$

ou

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{4}$$

Conhecendo k, achamos b da igualdade (3):

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx]. \tag{5}$$

Assim, se a recta $y = kx + b$ é uma assímptota, acha-se os coeficientes k e b com a ajuda das fórmulas (4) e (5). Inversamente, se os limites (4) e (5) existem, a igualdade (3) é verificada e a recta $y = kx + b$ é uma assímptota. Se um dos dois limites (4) e (5) não existe, a curva não tem assímptota.

Notemos que estudamos esta questão referindo-nos à figura 130 para $x \to +\infty$, mas todos os nossos raciocínios são igualmente válidos para o caso em que $x \to -\infty$.

Exemplo — 4. Achar as assímptotas da curva

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}.$$

Resolução — 1. Procuremos as assímptotas paralelas ao eixo Oy:

quando $x \to -0$, $y \to +\infty$;
quando $x \to +0$, $y \to -\infty$.

A recta $x = 0$ é, por conseguinte, uma assímptota paralela ao eixo Oy.

2. Procuremos as assímptotas oblíquas:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left[1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right] = 1,$$

isto é,

$$k = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [y - x] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x + 2x - 1}{x} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[2 - \frac{1}{x} \right] = 2,$$

assim,

$$b = 2.$$

Por conseguinte, a recta

$$y = x + 2$$

é uma assímptota oblíqua da curva considerada.

Para estudar a posição da curva em relação à sua assímptota, consideremos a diferença das ordenadas da curva e da assímptota correspondente a um mesmo valor de x:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - (x + 2) = -\frac{1}{x}.$$

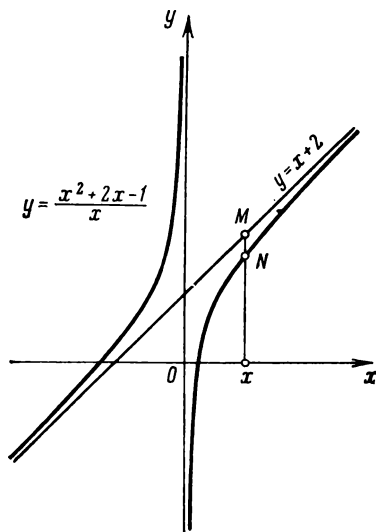



Fig. 131

Para $x > 0$ esta diferença é negativa, e para $x < 0$ positiva, por conseguinte, para $x > 0$ a curva está disposta por baixo e para $x < 0$ por cima da sua assímptota (fig. 131).

Exemplo — 5. Achar as assímptotas da curva

$$y = e^{-x} \cdot \text{sen}\, x + x.$$

Resolução — 1. É evidente que não há assímptota paralela ao eixo *Oy*.

2. Procuremos as assímptotas oblíquas:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} \text{sen}\, x + x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{e^{-x} \text{sen}\, x}{x} + 1 \right] = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [e^{-x} \text{sen}\, x + x - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} e^{-x} \text{sen}\, x = 0.$$

Por conseguinte, a recta

$$y = x$$

é uma assímptota oblíqua para $x \to +\infty$.

A curva considerada não tem assímptota para $x \to -\infty$. Com efeito, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{y}{x}$ não existe, visto que $\frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \text{sen}\, x + 1$ (o primeiro termo cresce indefinidamente quando $x \to -\infty$ e, por conseguinte, o limite não existe).

§ 11. Esquema geral do estudo das funções e da construção dos gráficos

O estudo das funções resume-se geralmente em determinar:

1) O domínio natural de definição da função;

2) Os pontos de descontinuidade da função;

3) Os intervalos de crescimento e decrescimento da função;

4) Os pontos de máximo e de mínimo, bem como os valores máximos e mínimos da função;

5) Os domínios de convexidade e de concavidade do gráfico, os pontos de inflexão;

6) As assímptotas do gráfico da função.

Este estudo permite traçar o gráfico da função (por vezes é preferível esboçar os elementos do gráfico destes elementos paralelamente ao desenvolvimento do estudo).

Nota — 1. Se a função considerada $y = f(x)$ é *par*, isto é, tal que o valor da função não mude quando a variável independente muda de sinal, por outras palavras, se

$$f(-x) = f(x),$$

basta estudar a função e construir o seu gráfico ùnicamente para os valores positivos da variável independente pertencente ao domínio de definição. No que respeita à parte do gráfico correspondente aos valores negativos da variável independente, basta notar que o gráfico duma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

Exemplo — 1. A função $y = x^2$ é par, visto que $(-x)^2 = (x^2)$ (ver fig. 5).

Exemplo — 2. A função $y = \cos x$ é par, visto que $\cos(-x) = \cos x$ (ver fig. 16).

Nota — 2. Se a função $y = f(x)$ é ímpar, isto é, que ela muda o seu sinal quando a variável independente muda de sinal, por outras palavras, se

$$f(-x) = -f(x),$$

basta estudar ùnicamente os valores positivos da variável independente. O gráfico duma função ímpar é simétrico em relação à origem das coordenadas.

Exemplo — 3. A função $y = x^3$ é ímpar, visto que $(-x)^3 = -x^3$ (ver fig. 7).

Exemplo — 4. A função $y = \operatorname{sen} x$ é ímpar, visto que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ (ver fig. 15).

Nota — 3. É, por vezes, preferível inverter a ordem das operações a efectuar quando se inicia o estudo duma função concreta, porque

certas propriedades da função permitem, por vezes, deduzir outras. Por exemplo, se estabelecemos já que a função considerada é contínua e derivável, e que determinamos os pontos do máximo e do mínimo, por isso mesmo determinamos os intervalos de crescimento e de decrescimento da função.

Exemplo — 5. Estudar a função

$$y=\frac{x}{1+x^2}$$

e construir o seu gráfico.

Resolução — 1. O domínio de definição da função é o intervalo $-\infty < x < \infty$. Notemos imediatamente que $y < 0$ para $x < 0$ e que $y > 0$ para $x > 0$.

2. A função é sempre contínua.

3. Procuremos os máximos e os mínimos desta função. Partindo da igualdade

$$y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0$$

encontramos os pontos críticos:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Estudemos a natureza dos pontos críticos:

$$y' < 0 \text{ para } x < -1,$$
$$y' > 0 \text{ para } x > -1.$$

A função tem, pois, um mínimo no ponto $x = -1$:

$$y_{\min}=(y)_{x=-1}=-0{,}5.$$

Por outro lado,

$$y' > 0 \text{ para } x < 1,$$
$$y' < 0 \text{ para } x > 1.$$

Por conseguinte, a função admite um máximo no ponto $x = 1$:

$$y_{\max}=(y)_{x=1}=0{,}5.$$

4. Determinemos os intervalos de crescimento e de decrescimento da função:

$y' < 0$ para $-\infty < x < -1$, a função é decrescente;
$y' > 0$ para $-1 < x < 1$, a função é crescente;
$y' < 0$ para $1 < x < \infty$, a função é decrescente.

5. Determinemos os intervalos de convexidade, de concavidade e os pontos de inflexão da curva.

Resulta da igualdade

$$y''=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}=0$$

que

$$x_1=-\sqrt{3}, \quad x_2=0, \quad x_3=\sqrt{3}.$$

Estudemos y'' em função de x:

para $-\infty < x < -\sqrt{3}$ tem-se $y'' < 0$, a curva é convexa;
para $-\sqrt{3} < x < 0$ tem-se $y'' > 0$, a curva é côncava;
para $0 < x < \sqrt{3}$ tem-se $y'' < 0$, a curva é convexa;
para $\sqrt{3} < x < \infty$ tem-se $y'' > 0$, a curva é côncava.

Por conseguinte, o ponto de coordenadas $x = -\sqrt{3}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ é um ponto de inflexão. Vê-se igualmente que os pontos (0, 0) e $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ são também pontos de inflexão.

6. Determinemos as assímptotas da curva:

$$\text{para } x \to +\infty,\ y \to 0; \text{ para } x \to -\infty,\ y \to 0.$$

Por conseguinte, a recta $y = 0$ é a única assímptota oblíqua. A curva não tem assímptotas paralelas ao eixo Oy, porque para nenhum valor finito de x o valor correspondente da função tende para o infinito.

O gráfico da curva estudada está representado na figura 132.

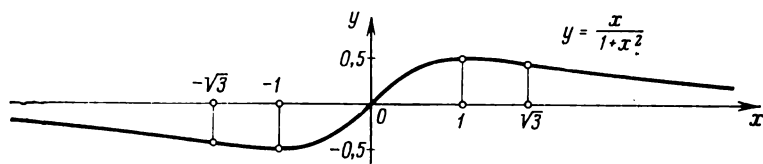



Fig. 132

Exemplo — 6. Estudar a função

$$y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$$

e construir o seu gráfico.

Resolução — 1. A função é definida para todos os valores de x.

2. A função é sempre contínua.

3. Procuremos os máximos e os mínimos desta função:

$$y' = \frac{4ax - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2}} = \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x(2a - x)^2}}.$$

A derivada existe sempre, menos nos pontos

$$x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 2a.$$

Estudemos os valores limites da derivada quando $x \to -0$ e $x \to +0$

$$\lim_{x \to -0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{(2a - x)^2 x}} = -\infty, \quad \lim_{x \to +0} \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{(2a - x)^2 x}} = +\infty$$

para $x < 0$ tem-se $y' < 0$; para $x > 0$ tem-se $y' > 0$.

Por conseguinte, a função tem um mínimo no ponto $x = 0$. O valor da função neste ponto é igual a zero.

Estudemos agora o comportamento da função na vizinhança do segundo ponto crítico $x_2 = 2a$. Quando $x \to 2a$ a derivada tende também para o infinito. Todavia, neste caso, a derivada é negativa para todos os valores de x suficientemente vizinhos de $2a$ (bem como para os valores de x situados à esquerda e à direita do ponto 2a). A função não tem, pois, extremo neste ponto. Na vizinhança do ponto $x_2 = 2a$, bem como, neste ponto, a função é decrescente; a tangente à curva neste ponto é paralela ao eixo Oy.

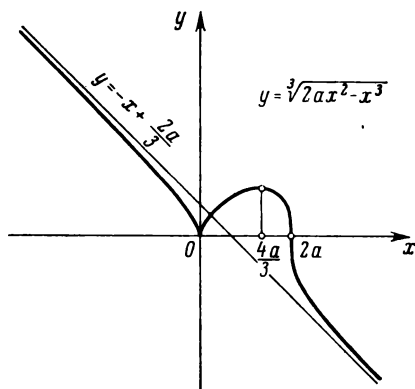



Fig. 133

A derivada anula-se para $x = \frac{4a}{3}$.

Estudemos este ponto crítico. Resulta da expressão da derivada primeira que

para $x < \frac{4a}{3}$ tem-se $y' > 0$,

para $x > \frac{4a}{3}$ tem-se $y' < 0$.

Por conseguinte, a função admite um máximo no ponto $x = \frac{4a}{3}$:

$$y_{\max} = \frac{2}{3} a \sqrt[3]{4}.$$

4. Utilizando os resultados do estudo efectuado deduzimos os intervalos de crescimento e de decrescimento da função:

a função é decrescente para $-\infty < x < 0$;

a função é crescente para $0 < x < \frac{4a}{3}$;

a função é decrescente para $\frac{4a}{3} < x < \infty$.

5. Determinemos os intervalos de convexidade e de concavidade da curva, bem como os pontos de inflexão: a derivada segunda

$$y'' = -\frac{8a^2}{9x^{4/3}(2a - x)^{5/3}}$$

não se anula em nenhum ponto; contudo, ela tem dois pontos de descontinuidade: são os pontos $x_1 = 0$ e $x_2 = 2a$.

Estudemos o sinal da derivada segunda na vizinhança de cada um destes pontos:

para $x < 0$, tem-se $y'' < 0$, a convexidade da curva está, pois, orientada para cima;

para $x > 0$, tem-se $y'' < 0$, a convexidade da curva está ainda orientada para cima.

O ponto de abcissa $x = 0$ não é, pois, um ponto de inflexão.

Para $x < 2a$, tem-se $y'' < 0$, a convexidade da curva está, pois, orientada para cima;

para $x > 2a$, tem-se $y'' > 0$, a convexidade da curva é orientada para baixo.

O ponto $(2a, 0)$ é, pois, um ponto de inflexão.

6. Determinemos as assímptotas da curva:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{2ax^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{2a}{x} - 1} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2ax^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x^2} = \frac{2a}{3}.$$

A recta

$$y = -x + \frac{2a}{3}$$

é, pois, uma assímptota oblíqua da curva $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$. O gráfico da curva estudada está representado na figura 133.

§ 12. Estudo das curvas dadas sob a forma paramétrica

Sejam

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

as equações paramétricas duma curva.

Neste caso o estudo e o traçado desta curva fazem-se da mesma maneira que para uma curva dada pela equação

$$y = f(x),$$

Calculemos as derivadas

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi'(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \psi'(t). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Calculemos a derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (3)$$

para os pontos da curva na vizinhança dos quais o gráfico desta última tem por equação $y = f(x)$, em que $f(x)$ é uma certa função.

Determinemos os valores do parâmetro $t = t_1, t_2, \ldots, t_k$ para os quais uma pelo menos das derivadas φ' e $\psi'(t)$ se anula ou tem um ponto de descontinuidade. (Tais valores de t serão chamados valores críticos.) Em virtude da fórmula (3), define-se em cada intervalo (t_1, t_2), (t_2, t_3), ..., (t_{k-1}, t_k) e, por conseguinte, em cada intervalo (x_1, x_2), (x_2, x_3), ..., (x_{k-1}, x_k) (em que $x_i = \varphi(t_i)$), o sinal de $\frac{dy}{dx}$ e por isso

mesmo se determinam os intervalos de crescimento ou de decrescimento. Isto permite determinar a natureza dos pontos correspondentes aos valores $t_1, t_2, \ldots, t_k$ do parâmetro. Calculemos agora:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\,\varphi'(t)-\varphi''(t)\,\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \tag{4}$$

Esta fórmula permite-nos definir a orientação da convexidade em cada ponto da curva.

Para determinar as assímptotas, procuram-se os valores de t tais que nas suas vizinhanças quer x, quer y tenda para o infinito, e os valores de t tais que nas suas vizinhanças x e y tendam simultâneamente para o infinito. O estudo da curva se processa da maneira habitual.

Mostremos, com exemplos, certas particularidades do estudo das curvas dadas sob a forma paramétrica.

Exemplo — 1. Estudar a curva dada pelas equações

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a \operatorname{sen}^3 t. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Resolução — As grandezas x e y são definidas para todos os valores de t. Mas, tendo em conta a periodicidade das funções $\cos^3 t$ e $\operatorname{sen}^3 t$ (o seu período é igual a 2π), basta considerar a variação do parâmetro t entre 0 e 2π; x varia, então, sobre o segmento $[-a, a]$; o domínio de definição da função y é o segmento $[-a, a]$. A curva considerada não tem, pois, assímptotas. Achamos em seguida:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3a\cos^2 t \operatorname{sen} t, \\ \frac{dy}{dt} &= 3a \operatorname{sen}^2 t \cos t. \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

Estas derivadas anulam-se para $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$. Determinemos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3a \operatorname{sen}^2 t \cos t}{-3a\cos^2 t \operatorname{sen} t}=-\operatorname{tg} t. \tag{3'}$$

Utilizando as fórmulas (2'), (3'), formemos o quadro seguinte:

Domínio de variação de t	Domínio de variação correspondente de x	Domínio de variação correspondente de y	Sinal de $\frac{dy}{dx}$	Carácter da variação de y em função de x ($y = f(x)$)
$0 < t < \frac{\pi}{2}$	$a > x > 0$	$0 < y < a$	$-$	decresce
$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	$+$	cresce
$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	$-$	decresce
$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	$+$	cresce

Este quadro mostra-nos que a relação (1') define duas funções contínuas da forma $y = f(x)$ tais que para $0 \leqslant t \leqslant \pi$ se tem $y \geqslant 0$ (ver as duas primeiras linhas do quadro) e para $\pi < t \leqslant 2\pi$ tem-se $y < 0$ (ver as duas últimas linhas do quadro). Resulta da fórmula (3'):

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \infty$$

e

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \infty.$$

Fig. 134

A tangente à curva nestes pontos é paralela ao eixo Oy. Além disso

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\pi} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2\pi} = 0.$$

A tangente à curva nestes pontos é, pois, paralela ao eixo Ox. Achemos, em seguida:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a \cos^4 t \cdot \sin t};$$

donde concluímos:

para $0 < t < \pi$ tem-se $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, a curva é côncava,

para $\pi < t < 2\pi$ tem-se $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, a curva é convexa.

Os resultados obtidos permitem-nos construir a curva considerada (fig. 134). Esta curva chama-se *asteróide*.

Exemplo — 2. Construir a curva dada pelas equações (fólio de Descartes).

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \qquad (1'')$$

Resolução — Estas duas funções são definidas para todos os valores t excepto $t = -1$.

Além disso,

$$\lim_{t \to -1-0} x = \lim_{t \to -1-0} \frac{3at}{1+t^3} = +\infty,$$

$$\lim_{t \to -1-0} y = \lim_{t \to -1-0} \frac{3at^2}{1+t^3} = -\infty;$$

$$\lim_{t \to -1+0} x = -\infty, \quad \lim_{t \to -1+0} y = +\infty.$$

Por outro lado, notemos que

para $t = 0$ se tem $x = 0$, $y = 0$,

quando $t \to +\infty$ tem-se $x \to 0$, $y \to 0$,

quando $t \to -\infty$ tem-se $x \to 0$, $y \to 0$.

Calculemos $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{6a\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}{(1+t^3)^2}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{3at\,(2-t^3)}{(1+t^3)^2}. \tag{2''}$$

Daí deduzimos os valores críticos seguintes para t:

$$t_1=-1, \quad t_2=0, \quad t_3=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad t_4=\sqrt[3]{2}.$$

Achamos em seguida:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t\,(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}. \tag{3''}$$

Servindo-nos das fórmulas (1"), (2"), (3"), formemos o quadro seguinte:

Domínio de variação de t	Domínio de variação correspondente de x	Domínio de variação correspondente de y	Sinal de $\frac{dy}{dx}$	Carácter da variação de y em função de x ($y = f(x)$)
$-\infty < t < -1$	$0 < x < +\infty$	$0 > y > -\infty$	$-$	decresce
$-1 < t < 0$	$-\infty < x < 0$	$+\infty > y > 0$	$-$	decresce
$0 < t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$0 < x < a\sqrt[3]{4}$	$0 < y < a\sqrt[3]{2}$	$+$	cresce
$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < t < \sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{4} > x > a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2} < y < a\sqrt[3]{4}$	$-$	decresce
$\sqrt[3]{2} < t < +\infty$	$a\sqrt[3]{2} > x > 0$	$a\sqrt[3]{4} > y > 0$	$+$	cresce

Resulta da fórmula (3"):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=0\\ \left(\substack{x=0\\ y=0}\right)}}=0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\infty\\ \left(\substack{x=0\\ y=0}\right)}}=\infty.$$

Por conseguinte, a curva passa duas vezes pela origem das coordenadas (a origem das coordenadas é um ponto duplo da curva, na vizinhança da origem a curva tem dois ramos); o primeiro ramo tem uma tangente paralela ao eixo Ox e o segundo uma tangente paralela ao eixo Oy. Por outro lado,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\\ \left(\substack{x=a\sqrt[3]{4}\\ y=a\sqrt[3]{2}}\right)}}=\infty.$$

Neste ponto a tangente à curva é paralela ao eixo Oy.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\sqrt[3]{2} \\ \left(\substack{x=a\sqrt[3]{2} \\ y=a\sqrt[3]{4}}\right)}} = 0.$$

Neste ponto a tangene à curva é paralela ao eixo Ox. Procuremos as assímptotas:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \to -1-0} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \lim_{x \to -1+0} \left[\frac{3at^2}{1+t^3} - (-1)\frac{3at}{1+t^3}\right] =$$

$$= \lim_{t \to -1-0} \left[\frac{3at(t+1)}{1+t^3}\right] = \lim_{t \to -1-0} \frac{3at}{1-t+t^2} = -a.$$

Por conseguinte, a recta $y = -x - a$ é uma assímptota de um dos ramos da curva quando $x \to +\infty$.

Do mesmo modo, achamos:

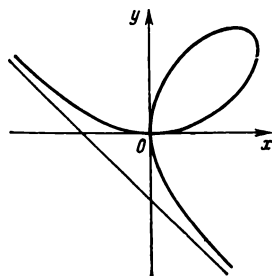
$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = -1,$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (y - kx) = -a.$$

Fig. 135

Assim, a recta $y = -x - a$ é uma assímptota de um dos ramos da curva quando $x \to -\infty$.

Segundo o estudo que acaba de ser feito, podemos traçar a curva (fig. 135).

Certas questões relativas ao estudo das curvas serão tratadas no Capítulo VIII, § 19, «Pontos singulares duma curva».

Exercícios

Achar os extremos das funções:

1. $y = x^2 - 2x + 3$. **Resp.** $y_{\min} = 2$ para $x = 1$.
2. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. **Resp.** $y_{\max} = \frac{7}{2}$ para $x = 1$, $y_{\min} = 1$ para $x = 3$.
3. $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$. **Resp.** $y_{\max} = 10$ para $x = 1$, $y_{\min} = -22$ para $x = 5$.
4. $y = -x^4 + 2x^2$. **Resp.** $y_{\max} = 1$ para $x = \pm 1$, $y_{\min} = 0$ para $x = 0$.
5. $y = x^4 - 8x^2 + 2$. **Resp.** $y_{\max} = 2$ para $x = 0$, $y_{\min} = -14$ para $x = \pm 2$.
6. $y = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$. **Resp.** máx. para $x = -4$ et $x = 3$, mín. para $x = -3$ et $x = 4$.
7. $y = 2 - (x-1)^{\frac{2}{3}}$. **Resp.** $y_{\max} = 2$ para $x = 1$.

8. $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$. **Resp. Não há extremos.**

9. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$. **Resp. mín. para** $x=\sqrt{2}$, **máx. para** $x=-\sqrt{2}$.

10. $y=\dfrac{(x-2)(3-x)}{x^2}$. **Resp. máx. para** $x=\dfrac{12}{5}$.

11. $y=2e^x+e^{-x}$. **Resp. mín. para** $x=-\dfrac{\operatorname{Log} 2}{2}$.

12. $y=\dfrac{x}{\operatorname{Log} x}$. **Resp.** $y_{min}=e$ **para** $x=e$.

13. $y=\cos x+\operatorname{sen} x \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$. **Resp.** $y_{max}=\sqrt{2}$ **para** $x=\dfrac{\pi}{4}$.

14. $y=\operatorname{sen} 2x-x \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$. **Resp. máx. para** $x=\dfrac{\pi}{6}$, **mín. para** $x=$ $=-\dfrac{\pi}{6}$.

15. $y=x+\operatorname{tg} x$. **Resp. Sem extremos.**

16. $y=e^x \operatorname{sen} x$. **Resp. mín. para** $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{4}$, **máx. para** $x=2k\pi+\dfrac{3}{4}\pi$.

17. $y=x^4-2x^2+2$. **Resp. máx. para** $x=0$; **mín. para** $x=-1$ **e para** $x=1$.

18. $y=(x-2)^3(2x+1)$. **Resp** $y_{min}\approx-8{,}24$ **para** $x=\dfrac{1}{8}$.

19. $y=x+\dfrac{1}{x}$. **Resp. mín. para** $x=1$; **máx. para** $x=-1$.

20. $y=x^2(a-x)^2$. **Resp.** $y_{max}=\dfrac{a^4}{16}$ **para** $x=\dfrac{a}{2}$; $y_{min}=0$ **para** $x=0$ **e para** $x=a$.

21. $y=\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{a-x}$. **Resp. máx. para** $x=\dfrac{a^2}{a-b}$; **mín para** $x=\dfrac{a^2}{a+b}$.

22. $y=x+\sqrt{1-x}$. **Resp.** $y_{max}=5/4$ **para** $x=3/4$; $y_{min}=-1$ **para** $x=-1$.

23. $y=x\sqrt{1-x}$ $(x\leqslant 1)$. **Resp.** $y_{max}=\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ **para** $x=\dfrac{2}{3}$.

24. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$. **Resp. mín. para** $x=-1$; **máx. para** $x=1$.

25. $y=x\operatorname{Log} x$. **Resp. mín. para** $x=1/e$.

26. $y=x\operatorname{Log}^2 x$. **Resp. máx. para** $x=e^{-\frac{1}{2}}$; **mín. para** $x=1$.

27. $y=\operatorname{Log} x-\operatorname{arc\,tg} x$. **Resp. A função cresce**

28. $y=\operatorname{sen} 3x-3\operatorname{sen} x$. **Resp. mín. para** $x=\pi/2$; **máx. para** $x=3\pi/2$.

29. $y=2x+\operatorname{arc\,tg} x$. **Resp. Sem extremos.**

30. $y = \operatorname{sen} x \cos^2 x$. Resp. mín. para $x = \frac{\pi}{2}$; dois máx.: para $x = \arc\cos \sqrt{\frac{2}{3}}$ e para $x = \arc\cos\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

31. $y = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$. Resp. máx. para $x = \frac{(4m+1)\pi}{2}$; mín. para $x = \frac{(4m+3)\pi}{2}$.

Achar o maior e menor valor das funções nos segmentos indicados:

32. $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$ $(-2 \leqslant x \leqslant 2)$. Resp. O maior valor é $y = 2$ para $x = \pm 1$, o menor valor é $y = -25$ para $x = +2$.

33. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ $(-1 \leqslant x \leqslant 5)$. Resp. O maior valor é $y = \frac{23}{3}$ para $x = 5$, o menor valor é $y = -\frac{13}{3}$ para $x = -1$.

34. $y = \frac{x-1}{x+1}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$. Resp. O maior valor é $y = \frac{3}{5}$ para $x = 4$, o menor valor é $y = -1$ para $x = 0$.

35. $y = \operatorname{sen} 2x - x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Resp. O maior valor é $= \frac{\pi}{2}$ para $x = -\frac{\pi}{2}$, o menor valor é $y = -\frac{\pi}{2}$ para $x = \frac{\pi}{2}$.

36. Deseja-se fazer uma caixa sem cobertura de volume máximo cortando e dobrando dum modo apropriado, quadrados iguais numa folha de chapa do lado a. Qual deve ser o comprimento do lado destes quadrados? Resp. $\frac{a}{6}$.

37. Mostrar que entre todos os rectângulos inscritos num dado círculo, o quadrado tem uma superfície máxima. Mostrar também que o perímetro é máximo para o quadrado.

38. Mostrar que entre todos os triângulos isósceles inscritos num dado círculo, o triângulo equilátero tem um perímetro máximo.

39. Achar, entre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa é igual a h, o que tem uma superfície máxima. Resp. O comprimento de cada lado é igual a $\frac{h}{\sqrt{2}}$.

40. Achar, entre os cilindros rectos inscritos numa esfera de raio R, o que tem um volume máximo. Resp. A altura deste cilindro é igual a $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

41. Determinar entre os cilindros rectos inscritos numa dada esfera de raio R o que tem área lateral máxima. Resp. A altura deste cilindro é igual a $R\sqrt{2}$.

42. Achar entre os cones rectos circunscritos a uma esfera do raio R, a altura do que tem volume mínimo. Resp. A altura é igual a $4R$. (O volume é, então, igual ao dobro do da esfera.)

43. O interior de um reservatório sem cobertura cujo fundo tem a forma de um quadrado deve ser recoberto de chumbo. A capacidade do reservatório é 32 l. Quais devem ser as dimensões deste reservatório, para que a quantidade de chumbo utilizado seja mínimo? Resp. Altura 0,2 m; lado da base 0,4 m, (isto é, o lado da base deve ser o dobro da altura).

44. Um trolha deve fazer uma goteira de capacidade máxima cujo fundo e lados laterais tenham 10 cm de largura; mais, os lados laterais devem ser igualmente inclinados em relação ao fundo. Qual será, no cimo, a largura da goteira? Resp. 20 cm.

45. Demonstrar que a fabricação de uma tenda cónica, de capacidade dada, exige uma despesa de tecido mínimo, quando a altura da tenda é $\sqrt{2}$ vezes maior que o raio da base.

46. Tem-se de fabricar um cilindro, sem cobertura, cujas paredes e fundo tenham uma dada espessura. Quais devem ser as dimenssões deste cilindro, para uma dada capacidade, se se desejar que a quantidade de material empregada seja mínima? Resp. Se R designa o raio interior da base e v o volume interior do cilindro, então, $R = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.

47. Tem-se de fabricar uma caldeira soldando às extremidades dum cilindro duas semi-esferas. As paredes da caldeira tem uma espessura constante. Para um dado volume v da caldeira, como proceder para que a superfície exterior seja mínima? Resp. A caldeira deve ter a forma duma esfera de raio interior $R = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}$.

48. Construir um trapézio isósceles de perímetro mínimo para uma dada superfície S; o ângulo da base é igual a α. Resp. O comprimento dos lados laterais é igual a $\sqrt{\frac{S}{\operatorname{sen} \alpha}}$.

49. Inscrever numa esfera de raio R um prisma triângular regular de volume máximo. Resp. a altura do prisma é igual a $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

50. Circunscrever um cone de volume mínimo a uma semi-esfera de raio R. A base deste cone coincide com o plano diametral de base da semi-esfera. Calcular a altura deste cone. Resp. A altura do cone é $R\sqrt{3}$.

51. Circunscrever um cone recto de volume mínimo a um cilindro de raio r supondo que as suas bases estão num mesmo plano e que os centros destas últimas coincidem. Resp. O raio da base do cone é igual a $\frac{3}{2}r$.

52. Cortar um sector num círculo de cartão de raio R de modo que enrolando-o se obtenha um funil de capacidade máxima. Resp. O ângulo ao centro deste sector é igual a $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

53. Entre todos os cilindros circulares inscritos num cubo de aresta a cujo eixo coincide com a diagonal do cubo e cujos círculos de bases são tangentes às faces do cubo, determinar o que tem volume máximo. Resposta. A altura do cilindro é igual a $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; o raio da base é igual a $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

54. Seja no plano um sistema ortogonal de coordenadas e um ponto (x_0, y_0) tomado no primeiro quadrante. Traçar uma recta passando por este

ponto de maneira que forme com as direcções positivas dos eixos coordenados um triângulo de superfície mínima. Resp. A equação da recta é

$$\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1.$$

55. Seja dado um ponto sobre o eixo da parábola $y^2 = 2px$ e situado à distância a do vértice desta parábola. Encontrar a abcissa do ponto da curva mais próxima deste ponto. Resp. $x = a - p$.

56. Estima-se que a resistência duma trave paralelipipédica é proporcional à sua largura e ao cubo da sua altura; encontrar a largura da trave mais resistente que se pode debitar dum tronco de 16 cm de diâmetro. Resp. A largura é igual a 8 cm.

57. Um barco está num ancoradouro a 9 km do ponto mais próximo da costa. Um mensageiro deve alcançar o mais rápido a uma localidade situada a 15 km do ponto da extremidade mais próxima do barco. Dado que um mensageiro percorre 5 km por hora, a pé, e 4 km por hora em canoa, em que ponto da extremidade deve acostar para chegar o mais rápido possível a esta localidade? Resp. a 3 km da localidade.

58. Um ponto material desloca-se no plano à velocidade v_1 em redor da linha recta MN e à velocidade v_2 sobre esta linha. Que caminho deve percorrer para satisfazer, no tempo mais curto, o trajecto AB, se B for um ponto da linha MN? A distância do ponto A à linha MN é igual a h, a distância entre o ponto B e a projecção α do ponto A sobre a a linha MN é igual a a. Resp. Se ACB for o caminho percorrido, então,

$$\frac{\alpha C}{AC}=\frac{v_1}{v_2} \text{ se } \frac{\alpha B}{AB}\geqslant\frac{v_1}{v_2} \text{ e } \alpha C=\alpha B \text{ se } \frac{\alpha B}{AB}<\frac{v_1}{v_2}.$$

59. Eleva-se um peso w com a ajuda duma alavanca. O fardo encontra-se à distância a cms do ponto de apoio; cada parte da alavanca de 1 cm de comprimento pesa v gramas. Qual deve ser o comprimento da alavanca para que a força necessária para elevar o peso seja mínimo? Resp. $x=\sqrt{\frac{2aw}{v}}$ cm.

60. As medidas sucessivas duma grandeza x desconhecida deu os resultados seguintes: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mostrar que a soma dos quadrados dos desvios $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2$ será mínimo se se escolher

$$x=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

61. A fim de reduzir ao máximo a fricção dum fluído contra as paredes dum canal, concebe-se este último de maneira que a superfície de contacto seja mínima. Mostrar que a forma ideal dum canal paralelipipédico aberto, cuja área da secção transversal é dada, é obtida quando a largura do canal é dupla da altura

Determinar os pontos de inflexão e os intervalos de convexidade e de concavidade das curvas·

62. $y = x^5$ Resp. Para $x < 0$ a curva é convexa e para $x > 0$ côncava; $x = 0$ é um ponto de inflexão.

63. $y = 1 - x^2$. Resp. A curva é sempre convexa.

64. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$. Resp. Ponto de inflexão para $x = 1$.

65. $y = (x - b)^3$. Resp. Ponto de inflexão para $x = b$.

66. $y = x^4$. Resp. A curva é sempre côncava.

67. $y = \frac{1}{x^2+1}$. Resp. Ponto de inflexão para $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

68. $y = \operatorname{tg} x$. Resp. Ponto de inflexão para $x = n\pi$.

69. $y = xe^{-x}$. Resp. Ponto de inflexão para $x = 2$.

70. $y = a - \sqrt[3]{x-b}$. Resp. Ponto de inflexão para $x = b$.

71. $y = a - \sqrt[5]{(x-b)^2}$. Resp. A curva não tem ponto de inflexão.

Encontrar as assimptotas das seguintes curvas:

72. $y = \frac{1}{x-1}$. Resp. $x = 1$; $y = 0$.

73. $y = \frac{1}{(x+2)^3}$. Resp. $x = -2$; $y = 0$.

74. $y = c + \frac{a^3}{(x-b)^2}$. Resp. $x = b$; $y = c$.

75. $y = e^{1/x} - 1$. Resp. $x = 0$; $y = 0$.

76. $y = \operatorname{Log} x$. Resp. $x = 0$. 77. $y^3 = 6x^2 + x^3$. Resp. $y = x + 2$.

78. $y^3 = a^3 - x^3$. Resp. $y + x = 0$. 79. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$. Resp. $x = 2a$.

80. $y^2(x-2a) = x^3 - a^3$. Resp. $x = 2a$, $y = \pm(x+a)$.

Estudar o comportamento e construir o gráfico das funções:

81. $y = x^4 - 2x + 10$.

82. $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

83. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

84. $y = \frac{6x}{1+x^2}$.

85. $y = \frac{4+x}{x^2}$.

86. $y = \frac{x}{x^2-1}$.

87. $y = \frac{x+2}{x^3}$.

88. $y = \frac{x^2}{1+x}$.

89. $y^2 = x^3 - x$.

90. $y = \frac{x^3}{3-x^2}$.

91. $y = \sqrt[3]{x^2} + 2$.

92. $y = x - \sqrt[3]{x^3+1}$.

93. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

94. $y = xe^{-x}$.

95. $y = x^2 e^{-x^2}$.

96. $y = x - \operatorname{Log}(x+1)$.

97. $y = \operatorname{Log}(x^2+1)$.

98. $y = \operatorname{sen} 3x$.

99. $y = x + \operatorname{sen} x$.

100. $y = x \operatorname{sen} x$.

101. $y = e^{-x} \operatorname{sen} x$.

102. $y = \operatorname{Log} \operatorname{sen} x$.

103. $y = \frac{\operatorname{Log} x}{x}$.

104. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{1}{2} t. \end{cases}$

105. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$

106. $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

107. $\begin{cases} x = ae^t \cos t, \\ y = ae^t \operatorname{sen} t. \end{cases}$

Exercícios suplementares

Encontrar as assímptotas das curvas:

108. $y=\frac{x^2+1}{1+x}$. Resp. $x=-1$; $y=x-1$. 109. $y=x+e^{-x}$. Resp. $y=x$.

110. $2y(x+1)^2=x^3$. Resp. $x=-1$ $y=\frac{1}{2}x-1$.

111. $y^3=a^3-x^2$. Resp. Sem assímptotas. 112. $y=e^{-2x}\operatorname{sen} x$. Resp. $y=0$.

113. $y=e^{-x}\operatorname{sen} 2x+x$. Resp. $y=x$.

114. $y=x \operatorname{Log}\left(e+\frac{1}{x}\right)$. Resp. $x=-\frac{1}{e}$; $y=x+\frac{1}{e}$.

115. $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$. Resp. $x=0$; $y=x$. 116. $x=\frac{2t}{1-t^2}$, $y=\frac{t^2}{1-t^2}$. Resp. $y=$ $=\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Estudar o comportamento e construir o gráfico das funções:

117. $y=|x|$. 118. $y=\operatorname{Log}|x|$. 119. $y^2=x^3-x$.

120. $y=(x+1)^2(x-2)$. 121. $y=x+|x|$. 122. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$.

123. $y=x^2\sqrt{x+1}$. 124. $y=\frac{x^2}{2}-\operatorname{Log} x$. 125. $y=\frac{x^2}{2}\operatorname{Log} x$.

126. $y=\frac{1}{e^x-1}$. 127. $y=\frac{x}{\operatorname{Log} x}$. 128. $y=x+\frac{\operatorname{Log} x}{x}$.

129. $y=x\operatorname{Log} x$. 130. $y=e^{\frac{1}{x}}-x$. 131. $y=|\operatorname{sen} 3x|$.

132. $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. 133. $y=x \operatorname{arc\,tg} x$. 134. $y=x-2\operatorname{arc\,tg} x$.

135. $y=e^{-2x}\operatorname{sen} 3x$. 136. $y=|\operatorname{sen} x|+x$. 137. $y=\operatorname{sen}(x^2)$.

138. $y=\cos^3 x+\operatorname{sen}^3 x$. 139. $y=\frac{x+|x|}{2}$.

140. $y=\frac{x-|x|}{2}$. 141. $y=\operatorname{sen}\left(\frac{x+|x|}{2}\right)-\frac{x-|x|}{2}$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$

142. $y=\cos\left(\frac{x-|x|}{2}\right)-\frac{x+|x|}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)$.

143. $y=\frac{1}{2}(3x+|x|)+1$. 144. $y=\frac{1}{2}[3(x-1)+|x-1|]+1$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$.

Capítulo VI

CURVATURA DUMA CURVA

§ 1. Comprimento do arco e sua derivada

Suponhamos que o arco da curva M_0M (fig. 136), é o gráfico da função $y = f(x)$ definida no intervalo (a, b). Definamos o comprimento do arco da curva. Tomemos sobre a curva AB os pontos $M_0, M_1, M_2, \ldots M_{i-1}, M_i, \ldots, M_{n-1}, M$. Juntando estes pontos pelos segmentos de recta obtemos uma linha poligonal $M_0M_1M_2 \ldots M_{i-1}M_i \ldots M_{n-1}M$ inscrita no arco M_0M. Designemos por P_n o comprimento desta linha poligonal.

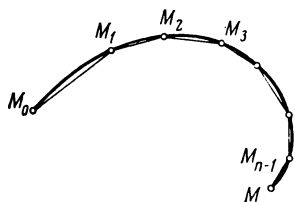



Fig. 136

Chama-se *comprimento do arco AB* (e designa-se por s) o limite para o qual tende o comprimento desta linha poligonal, quando o comprimento do maior dos segmentos $M_{i-1}M_i$ que constituem esta linha tende para zero, se este limite existir e não depender da escolha dos vértices da linha poligonal $M_0M_1M_2 \ldots M_{i-1}M_i \ldots M_{n-1}M$.

Notemos que esta definição do comprimento dum arco de curva qualquer, é análoga à do comprimento da circunferência.

Mostraremos, no Capítulo XII, que se a função $f(x)$ e a sua derivada $f'(x)$ são contínuas sobre o segmento $[a, b]$, o arco da curva $y = f(x)$ compreendido entre os pontos $[a, f(a)]$ e $[b, f(b)]$, tem um comprimento bem determinado que se pode calcular com o auxílio de fórmulas apropriadas. Demonstrar-se-á, no mesmo capítulo, que sob as condições acima citadas o quociente do comprimento do arco e do comprimento da corda correspondente tende para a unidade, quando o comprimento da corda tende para zero, isto é,

$$\lim_{M_0M \to 0} \frac{\text{comprimento } \overset{\frown}{M_0M}}{\text{comprimento } \overline{M_0M}} = 1.$$

Pode-se fàcilmente demonstrar este teorema pela circunferência (*). No entanto, para o caso geral, admiti-lo-emos por agora sem demonstração.

Consideremos o seguinte problema.

Seja $y = f(x)$, a equação duma curva do plano Oxy.

Seja $M_0(x_0, y_0)$, um ponto dado tomado sobre esta curva e $M(x, y)$, um ponto variável desta curva. Designemos por s o comprimento do arco M_0M (fig. 138).

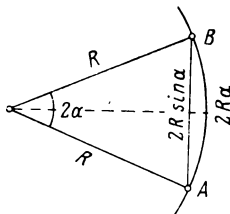



Fig. 137

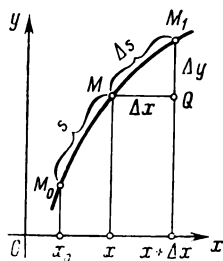



Fig. 138

Quando a abcissa x do ponto M varia, o comprimento s do arco varia igualmente; é, por conseguinte, uma função de x. Calculemos a derivada de s em relação a x.

Demos a x um crescimento Δx. O arco s sofre, então, um crescimento $\Delta s =$ comprimento $\overset{\frown}{MM_1}$. Seja $\overline{MM_1}$ a corda que subtende este arco. Para determinar o limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$, procedemos da maneira seguinte: obtemos do triângulo MM_1Q:

$$\overline{MM_1^2} = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Multipliquemos e dividamos o primeiro membro por Δs^2:

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2 \cdot \Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Dividamos os dois membros da igualdade por Δx^2:

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

(*) Consideremos o arco AB correspondente ao ângulo ao centro 2α (fig. 137). O comprimento deste arco é igual a $2R\alpha$ (R designa o raio do círculo); o comprimento da corda correspondente é $2R \operatorname{sen} \alpha$. Eis porque

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\text{comprimento } \overset{\frown}{AB}}{\text{comprimento } \overline{AB}} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2R\alpha}{2R \operatorname{sen} \alpha} = 1.$$

Achemos o limite dos membros, esquerdo e direito, quando $\Delta x \to 0$.

Como $\lim\limits_{\overline{MM_1}\to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta s} = 1$ e $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, temos:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

ou

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (1)$$

Obtemos a seguinte expressão pelo *diferencial do arco*:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (2)$$

ou (*)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad (2')$$

Obtivemos a expressão do diferencial do comprimento do arco para uma curva cuja equação é $y = f(x)$. Contudo, a fórmula (2') é igualmente válida, no caso em que a curva é expressa por equações paramétricas.

Se as expressões paramétricas da curva são:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

então,

$$dx = \varphi'(t)\, dt, \qquad dy = \psi'(t)\, dt,$$

e a expressão (2'), escreve-se sob a forma

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

§ 2. Curvatura

Um dos elementos que caracterizam a forma duma curva é o seu grau de flexão, de encurvamento. Seja dada uma curva que não tem pontos duplos e que tem uma tangente determinada em cada ponto.

Tracemos as tangentes à curva em dois pontos quaisquer A e B e designemos por α o ângulo formado por estas tangentes ou,

(*) Verdadeiramente falando, a fórmula (2') apenas está certa se $dx > 0$. Se $dx < 0$, então, $ds = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Eis a razão porque é mais justo se escrever para o caso geral:

$$|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

mais exactamente, o ângulo de rotação da tangente quando se passa do ponto A ao ponto B (fig. 139). Chama-se a este ângulo, *ângulo de contingência* do arco AB. De dois arcos do mesmo comprimento, o mais encurvado é aquele cujo ângulo de contingência é maior (fig. 139 e 140).

Por outro lado, não se pode, evidentemente, caracterizar o grau de encurvamento dos arcos de curva de comprimentos diferentes

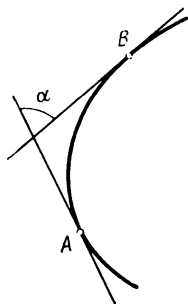
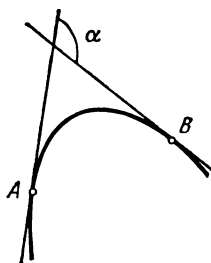
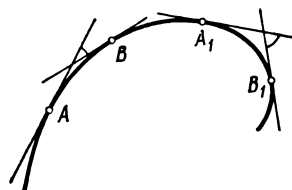



Fig. 139 Fig. 140 Fig. 141

baseando-se ùnicamente no ângulo de contingência. Por conseguinte, a característica completa da curvatura duma curva qualquer será o *quociente* do ângulo de contingência pelo comprimento do arco correspondente.

Definição — 1. Chama-se *curvatura média* K_m do arco $\overset{\frown}{AB}$ ao quociente do ângulo de contingência correspondente α e do comprimento do arco que ele subtende:

$$K_{\text{m}} = \frac{\alpha}{\overset{\frown}{AB}}.$$

A curvatura média dos diferentes arcos duma curva pode variar com o arco escolhido; assim, a curvatura média dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A_1B_1}$ da curva representada sobre a figura 141 não é igual, ainda que estes arcos sejam de igual comprimento. Mais, o grau de encurvamento desta curva varia gradualmente. Eis porque, a fim de caracterizar o grau de encurvamento duma curva dada na vizinhança imediata dum dado ponto A, introduzimos a noção de curvatura num ponto.

Definição — 2. Chama-se *curvatura da curva* no ponto A e nota-se K_A ao limite para o qual tende a curvatura média do arco $\overset{\frown}{AB}$

quando o comprimento deste arco tende para zero (isto é, quando B se aproxima (*) indefinidamente do ponto A):

$$K_A = \lim_{B \to A} K_m = \lim_{AB \to 0} \frac{\alpha}{\widehat{AB}}.$$

Exemplo — Dado um círculo de raio r: 1) determinar a curvatura média do arco AB correspondente ao ângulo ao centro α (fig. 142); 2) determinar a curvatura no ponto A.

Resolução — 1. É evidente que o ângulo de contingência do arco AB é igual a α e que o comprimento deste arco é igual a αr. Por conseguinte,

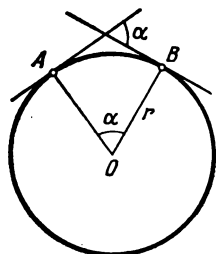
$$K_m = \frac{\alpha}{\alpha r}$$

Fig. 142

ou

$$K_m = \frac{1}{r}.$$

2. A curvatura no ponto A é igual a

$$K = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}.$$

Assim, a curvatura média dum arco do círculo de raio r não depende da posição e do comprimento desse arco; ela é igual para todos os arcos a $\frac{1}{r}$. Do mesmo modo, a curvatura do círculo num ponto dado não depende da posição deste ponto e é também igual a $\frac{1}{r}$.

Nota — Notemos que para uma curva qualquer a curvatura pode geralmente variar quando se passa dum ponto para outro. É o que veremos em seguida.

§ 3. Cálculo da curvatura

Vamos estabelecer uma fórmula que nos permitirá calcular a curvatura em cada ponto $M(x, y)$ duma curva. Suporemos que num sistema de coordenadas cartesianas a curva é dada por uma equação da forma

$$y = f(x) \tag{1}$$

e que a função $f(x)$ tem uma derivada segunda contínua.

Tracemos as tangentes à curva nos pontos M e M_1 de abcissas x e $x + \Delta x$ e designemos por φ e $\varphi + \Delta\varphi$ os ângulos formados por estas tangentes com o eixo Ox positivo (fig. 143).

(*) Supomos que o valor do limite é independente da escolha do ponto variável B (à esquerda ou à direita do ponto A).

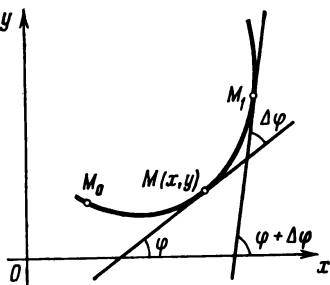
Designemos por s o comprimento do arco $\overset{\frown}{M_0M}$ contado a partir dum ponto dado M_0 (chama-se-lhe, por vezes, a abcissa curvilínea do ponto M); então, $\Delta s = \overset{\frown}{M_0M_1} - \overset{\frown}{M_0M}$, e $|\Delta s| = \overset{\frown}{MM_1}$.

Vê-se, imediatamente, da figura 143, que o ângulo de contingência correspondente ao arco $\overset{\frown}{MM_1}$ é igual ao valor absoluto (*) da diferença dos ângulos φ e $\varphi + \Delta\varphi$, isto é, que ele é igual a $|\Delta\varphi|$. Em virtude da definição da curvatura média, temos para o arco $\overset{\frown}{MM_1}$:

$$K_m = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Fig. 143

Para calcular a *curvatura no ponto M*, é preciso achar o limite desta expressão quando o comprimento do arco $\overset{\frown}{MM_1}$ tende para zero:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Como φ e s dependem de x (são funções de x), podemos considerar φ como uma função de s e supor que esta função é expressa por equações paramétricas com o auxílio do parâmetro x. Então,

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

e, por conseguinte,

$$K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|. \tag{2}$$

Para calcular $\frac{d\varphi}{ds}$ utilizemos a fórmula de derivação das funções paramétricas:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}.$$

(*) É evidente que para a curva representada na figura 143 $|\Delta\varphi| = \Delta\varphi$ visto que $\Delta\varphi > 0$.

Para exprimir $\frac{d\varphi}{ds}$ com a ajuda da função $y = f(x)$, notemos que $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$ e, por conseguinte,

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{dy}{dx}.$$

Derivemos esta igualdade em relação a x; temos:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

No que respeita à derivada $\frac{ds}{dx}$, achámos já no § 1, Capítulo VI que

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Eis porque,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

ou, visto que $K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$, temos finalmente:

$$K = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \qquad (3)$$

Por conseguinte, em qualquer ponto da curva onde a derivada segunda $\frac{d^2y}{dx^2}$ existe e é contínua, pode-se calcular a curvatura com o auxílio da fórmula (3). Notemos que, no decurso do cálculo da curvatura, afecta-se de sinal mais a raíz do denominador, visto que a curvatura é, por definição, uma quantidade não negativa.

Exemplo — 1 Determinar a curvatura da parábola $y^2 = 2px$:

a) num ponto arbitrário $M(x, y)$;
b) no ponto $M_1(0, 0)$;
c) no ponto $M_2\left(\frac{p}{2}, p\right)$.

Resolução — Achemos as derivadas, primeira e segunda, da função $y=\sqrt{2px}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{\sqrt{2px}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{p^2}{(2px)^{3/2}}.$$

Substituindo estas expressões na fórmula (3), temos:

a)
$$K=\frac{p^2}{(2px+p^2)^{3/2}};$$

b)
$$(K)_{\substack{x=0,\\ y=0}}=\frac{1}{p};$$

c)
$$K_{\substack{x=\frac{p}{2},\\ y=p}}=\frac{1}{2\sqrt{2p}}.$$

Exemplo — 2. Determinar a curvatura da recta $y = ax + b$ num ponto arbitrário $M(x, y)$.

Resolução.

$$y'=a, \quad y''=0.$$

Em virtude da fórmula (3) temos:

$$K=0.$$

A recta é, pois, «uma curva de curvatura nula». Este resultado pode ser fàcilmente reencontrado partindo da própria definição de curvatura.

§ 4. Cálculo da curvatura das curvas sob forma paramétrica

Sejam

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t)$$

as equações paramétricas duma curva.

Então, (ver § 24, Capítulo III):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{(\varphi')^3}.$$

Substituindo estas expressões na fórmula (3) do parágrafo anterior, temos:

$$K=\frac{|\psi''\varphi'-\psi'\varphi''|}{[\varphi'^2+\psi'^2]^{3/2}}. \tag{1}$$

Exemplo — Determinar a curvatura da ciclóide

$$x = a\,(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a\,(1 - \cos t)$$

num ponto arbitrário (x, y).

Resolução.

$$\frac{dx}{dt} = a\,(1 - \cos t), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a \operatorname{sen} t, \quad \frac{dy}{dt} = a \operatorname{sen} t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = a \cos t.$$

Substituindo estas expressões na fórmula (3), temos:

$$K = \frac{|\,a\,(1 - \cos t)\,a \cos t - a \operatorname{sen} t \cdot a \operatorname{sen} t\,|}{|\,a^2\,(1 - \cos t)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 t\,|^{3/2}} =$$

$$= \frac{|\cos t - 1|}{2^{3/2} a\,(1 - \cos t)^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2} a\,(1 - \cos t)^{1/2}} = \frac{1}{4a \left|\operatorname{sen} \frac{t}{2}\right|}.$$

§ 5. Cálculo da curvatura das curvas em coordenadas polares

Suponhamos que a curva é dada pela equação

$$\rho = f(\theta). \tag{1}$$

Escrevamos as fórmulas de passagem das coordenadas polares às coordenadas cartesianas:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta, \\ y &= \rho \operatorname{sen}\theta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Substituindo nestas fórmulas ρ pela sua expressão em função de θ, isto é, por $f(\theta)$, temos:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(\theta) \cdot \cos\theta, \\ y &= f(\theta) \cdot \operatorname{sen}\theta. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Pode-se considerar estas equações como sendo as equações paramétricas da curva (1) com θ por parâmetro.

Então,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho \operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cos\theta - 2\frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta - \rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\operatorname{sen}\theta + 2\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta.$$

Substituindo as expressões acima na fórmula (1) do parágrafo anterior, daí deduzimos uma fórmula que permite calcular a curvatura duma curva em coordenadas polares:

$$K = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}. \tag{4}$$

Exemplo — Determinar a curvatura da espiral de Arquimedes $\rho = a\theta$ $(a > 0)$ num ponto arbitrário (fig. 144).

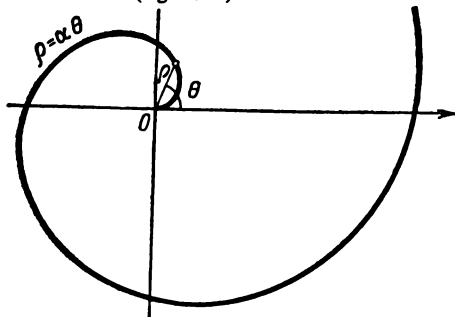



Fig. 144

Resolução.

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a; \quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = 0.$$

Por conseguinte,

$$K = \frac{|a^2\theta^2 + 2a^2|}{(a^2\theta^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a}\frac{\theta^2 + 2}{(\theta^2 + 1)^{3/2}}.$$

Notemos que para grandes valores de θ são verificadas as igualdades aproximadas seguintes:

$$\frac{\theta^2 + 2}{\theta^2} \approx 1, \quad \frac{\theta^2 + 1}{\theta^2} \approx 1;$$

eis porque, substituindo na fórmula precedente $\theta^2 + 2$ por θ^2 e $\theta^2 + 1$ por θ^2, deduzimos uma fórmula aproximada (para grandes valores de θ):

$$K \approx \frac{1}{a}\frac{\theta^2}{(\theta^2)^{3/2}} = \frac{1}{a\theta}.$$

Assim, a espiral de Arquimedes tem para grandes valores de θ, a mesma curvatura que um círculo de raio $a\theta$.

§ 6. Raio e círculo de curvatura. Centro de curvatura. Evoluta e evolvente

Definição — Chama-se *raio de curvatura* duma curva num ponto dado M à grandeza R igual ao inverso da curvatura K desta curva neste ponto:

$$R = \frac{1}{K} \tag{1}$$

ou

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}. \qquad (2)$$

Tracemos no ponto M da curva, a normal (fig. 145), orientada no sentido da concavidade desta curva, e apoiemos nesta normal o segmento MC igual ao raio de curvatura R desta curva no ponto M. O ponto C chama-se *centro de curvatura* desta curva no ponto M,

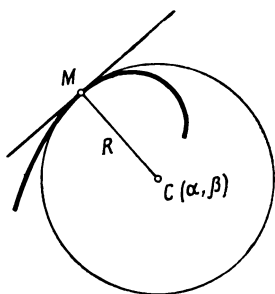
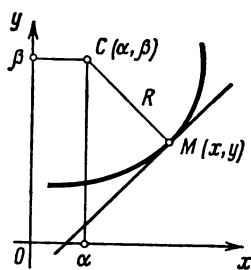



Fig. 145 Fig. 146

e o círculo de raio R e de centro no ponto C (passando pelo ponto M) *círculo de curvatura* desta curva no ponto M.

Resulta da definição de círculo de curvatura que num dado ponto, a curvatura da curva é igual à do círculo de curvatura.

Estabeleçamos as fórmulas que definem as coordenadas do círculo de curvatura.

Seja

$$y = f(x) \qquad (3)$$

a equação da curva.

Fixemos sobre a curva um ponto $M(x, y)$ e determinemos as coordenadas α e β do centro de curvatura correspondente a este ponto (fig. 146). Para isso, formemos a equação da normal à curva no ponto M:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \qquad (4)$$

(X e Y designam as coordenadas correntes dum ponto da normal).

O ponto C (α, β) estando sobre a normal, as suas coordenadas devem verificar a equação (4):

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x). \tag{5}$$

A distância do ponto C (α, β) no ponto $M(x, y)$, é igual ao raio de curvatura R:

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2. \tag{6}$$

Resolvendo as equações (5) e (6), determinamos α e β:

$$(\alpha - x)^2 + \frac{1}{y'^2}(\alpha - x)^2 = R^2,$$

$$(\alpha - x)^2 = \frac{y'^2}{1 + y'^2} R^2;$$

donde

$$\alpha = x \pm \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} R, \qquad \beta = y \mp \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} R.$$

Mas como $R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, então,

$$\alpha = x \pm \frac{y'(1 + y'^2)}{|y''|}, \qquad \beta = y \mp \frac{1 + y'^2}{|y''|}.$$

Para saber que sinal devemos tomar nestas últimas fórmulas, teremos de considerar dois casos: $y'' > 0$ e $y'' < 0$. Se $y'' > 0$ a curva é côncava neste ponto e, por conseguinte, $\beta > y$ (fig. 146), logo deveremos tomar os sinais de baixo. Como neste caso $|y''| = y''$, as fórmulas das coordenadas do centro de curvatura exprimir-se-ão pelas fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \\ \beta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Pode-se demonstrar duma maneira análoga, que as fórmulas (7) são válidas igualmente no caso em que $y'' < 0$.

Se a curva é dada pelas equações paramétricas

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

pode-se, fàcilmente, determinar as coordenadas do centro de curvatura, a partir das fórmulas (7), substituindo nestas últimas y' e y'' pelas suas expressões correspondentes em função do parâmetro:

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t}; \qquad y'' = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{x'^3_t}.$$

Então,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}, \\ \beta &= y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}. \end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

Exemplo — 1. Determinar as coordenadas do centro de curvatura da parábola

$$y^2 = 2px$$

a) num ponto arbitrário $M(x, y)$;
b) no ponto $M_0(0, 0)$;
c) no ponto $M_1\left(\frac{p}{2}, p\right)$.

Resolução — Substituindo os valores correspondentes de $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ nas fórmulas (7), temos, (fig. 147):

a) $\alpha = 3x + p.\ \beta = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}$;

b) para $x = 0$, tem-se: $\alpha = p,\ \beta = 0$;

c) para $x = \frac{p}{2}$, tem-se: $\alpha = \frac{5p}{2},\ \beta = -p$.

Se no ponto $M_1(x, y)$ a curvatura da curva não é igual a zero, corresponde a este ponto um centro de curvatura bem determinado $C_1(\alpha, \beta)$. O conjunto de todos os centros de curvatura duma curva constitui uma nova curva chamada *evoluta* da curva considerada.

Assim, chama-se evoluta de uma curva ao lugar geométrico dos centros de curvatura desta curva. A curva em questão é, então, chamada *evolvente.*

Se a curva é dada pela equação $y = f(x)$, pode-se, então, considerar as equações (7) como sendo as equações paramétricas da evoluta, com x por parâmetro. Eliminando o parâmetro x destas equações (se isso for possível), deduz-se a expressão da dependência directa entre as coordenadas correntes α e β da evoluta. Se a curva é dada pelas equações paramétricas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, as equações (7') serão, então, as equações paramétricas da evoluta (visto que as quantidades x, y, x', y', x'', y'' são funções de t).

Exemplo — 2. Achar a equação da evoluta da parábola

$$y^2 = 2px.$$

Resolução — Servindo-nos dos resultados do exemplo (1), podemos escrever em qualquer ponto arbitrário (x, y) da parábola:

$$\alpha = 3x + p,$$

$$\beta = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}.$$

Eliminando o parâmetro x entre estas duas relações, encontramos:

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3.$$

É a equação duma parábola semi-cúbica (fig. 148).

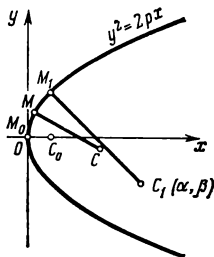



Fig. 147

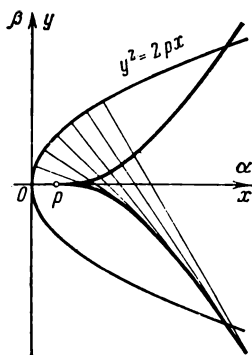



Fig. 148

Exemplo — 3. Determinar a equação da evoluta da elipse definida pelas equações paramétricas

$$x = a\cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t.$$

Resolução — Calculemos as derivadas de x e y em relação a t:

$$x' = -a \operatorname{sen} t, \qquad y' = b\cos t;$$

$$x'' = -a\cos t, \qquad y'' = -b \operatorname{sen} t.$$

Substituindo a expressão destas derivadas na fórmula (7'), temos:

$$\alpha = a\cos t - \frac{b\cos t\,(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab \operatorname{sen}^2 t + ab\cos^2 t} =$$

$$= a\cos t - a\cos t \operatorname{sen}^2 t - \frac{b^2}{a}\cos^3 t = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t.$$

Assim,

$$\alpha = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t.$$

Determinamos, duma maneira análoga:

$$\beta = \left(b - \frac{a^2}{b}\right)\operatorname{sen}^3 t.$$

Eliminando o parâmetro t, deduzimos a equação da evoluta da elipse sob a forma

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{\beta}{a}\right)^{2/3}=\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{2/3}.$$

α e β são aqui as coordenadas correntes da evoluta (fig. 149).

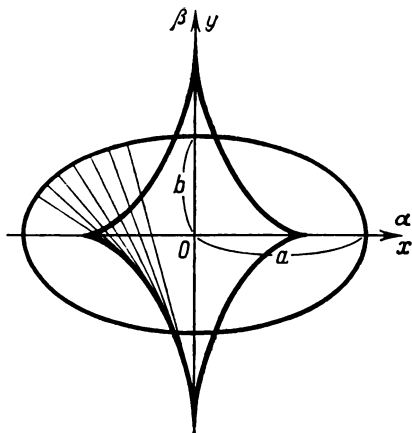



Fig. 149

Exemplo — 4. Achar as equações paramétricas da evoluta da ciclóide

$$x = a\,(t - \text{sen}\; t),$$
$$y = a\,(1 - \cos t).$$

Resolução.

$$x' = a\,(1 - \cos t), \qquad y' = a \;\text{sen}\; t;$$
$$x'' = a \;\text{sen}\; t, \qquad y'' = a \cos t.$$

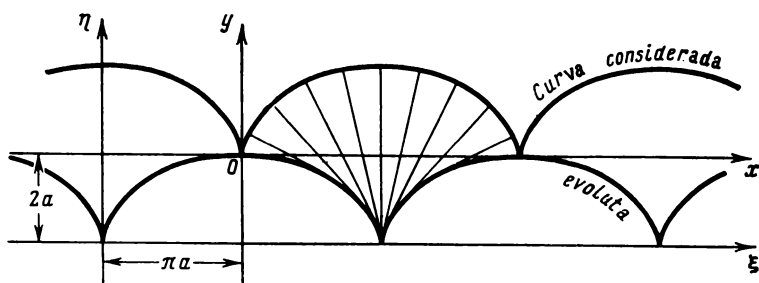



Fig. 150

Substituindo as expressões achadas na fórmula (7'), temos:

$$\alpha = a\,(t + \text{sen}\; t), \qquad \beta = -\,a\,(1 - \cos t).$$

Procedendo a uma mudança de variáveis, fazendo

$$\alpha = \xi - \pi a, \qquad \beta = \eta - 2a, \qquad t = \tau - \pi;$$

as equações da evoluta escrevem-se, então, sob a forma

$$\xi = a(\tau - \operatorname{sen} \tau), \qquad \eta = a(1 - \cos \tau).$$

Em relação às coordenadas ξ e η estas equações definem igualmente uma ciclóide gerada por uma circunferência de raio a.

Assim, a evoluta da ciclóide é a própria ciclóide mas que sofreu uma transformação $-\pi a$ no sentido do eixo Ox e $-2a$ no sentido do eixo Oy (fig. 150).

§ 7. Propriedades da evoluta

Teorema — 1. *A normal a uma dada curva é a tangente da sua evoluta.*

Demonstração — O coeficiente angular da tangente à evoluta definida pelas equações paramétricas (7′) do precedente parágrafo é

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\frac{d\beta}{dx}}{\frac{d\alpha}{dx}}.$$

Atendendo a que [em virtude dessas mesmas equações (7′)]

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{3y''^2y'^2 - y'y''' - y'^3y'''}{y''^2} = -y'\frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2y'''}{y''^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{3y''^2y' - y''' - y'^2y'''}{y''^2}, \qquad (2)$$

deduzimos a relação

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{y'}.$$

Mas y' é o coeficiente angular da tangente à curva no ponto correspondente. Por conseguinte, resulta desta última relação que a tangente à curva é perpendicular à tangente à evoluta desta curva no ponto correspondente; por outras palavras, a normal à curva é a tangente à evoluta desta curva.

Teorema — 2. *Se o raio de curvatura varia duma maneira monótona (isto é, permanecendo crescente ou decrescente), numa certa parte* M_1M_2 *da curva, o crescimento do comprimento do arco da evoluta nessa parte da curva é igual (em valor absoluto) ao crescimento correspondente do raio de curvatura desta curva.*

Demonstração — Em virtude da fórmula (2') do § 1 Capítulo VI, temos:

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

em que ds é o diferencial do comprimento do arco da evoluta; resulta por conseguinte,

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2.$$

Substituindo nesta última relação as expressões (1) e (2), temos

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = (1 + y'^2)\left(\frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2y'''}{y''^2}\right)^2. \tag{3}$$

Calculemos agora $\left(\frac{dR}{dx}\right)^2$. Como

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}, \quad \text{então,} \quad R^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2}.$$

Derivemos, em relação a x, os dois membros desta igualdade; achamos, depois de termos efectuado as transformações adequadas

$$2R\frac{dR}{dx} = \frac{2(1 + y'^2)^2(3y'y''^2 - y''' - y'^2y''')}{(y'')^3}.$$

Dividamos os dois membros desta igualdade por $2R = \frac{2(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$, temos:

$$\frac{dR}{dx} = \frac{(1 + y'^2)^{1/2}(3y'y''^2 - y''' - y'^2y''')}{y''^2}.$$

Elevando ao quadrado, temos:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = (1 + y'^2)\left(\frac{3y'y''^2 - y''' - y'^2y'''}{y''^2}\right)^2. \tag{4}$$

Das equações (3) e (4), obtemos:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

donde

$$\frac{dR}{dx} = \mp\frac{ds}{dx}.$$

Por hipótese $\frac{dR}{dx}$ não muda o seu sinal (R é, ou crescente, ou decrescente), por conseguinte, $\frac{ds}{dx}$ conserva igualmente o seu sinal. Tomemos para fixar ideias $\frac{dR}{dx} \leqslant 0$, $\frac{ds}{dx} \geqslant 0$ (o que corresponde à fig. 151). Por conseguinte, $\frac{dR}{dx} = -\frac{ds}{dx}$.

Sejam x_1 e x_2, as abcissas dos pontos M_1 e M_2. Apliquemos o teorema de Cauchy às funções $s(x)$ e $R(x)$ sobre o segmento $[x_1, x_2]$:

$$\frac{s(x_2) - s(x_1)}{R(x_2) - R(x_1)} = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=\xi}}{\left(\frac{dR}{dx}\right)_{x=\xi}} = -1,$$

em que ξ é um número compreendido entre x_1 e x_2 ($x_1 < \xi < x_2$).

Façamos, (fig. 151):

$$s(x_2) = s_2, \quad s(x_1) = s_1,$$

$$R(x_2) = R_2, \quad R(x_1) = R_1.$$

Então, $\frac{s_2 - s_1}{R_2 - R_1} = -1$ ou

$$s_2 - s_1 = -(R_2 - R_1).$$

Mas isto significa que

$$|s_2 - s_1| = |R_2 - R_1|.$$

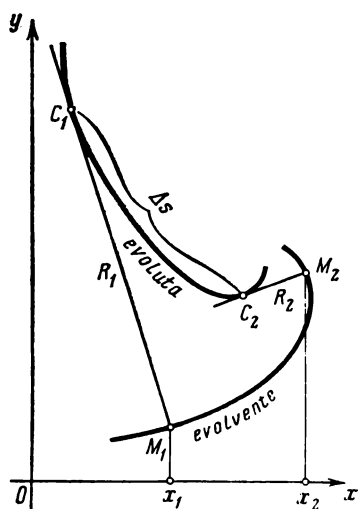



Fig. 151

Demonstrar-se-ia duma maneira idêntica, esta igualdade para o caso em que o raio de curvatura fosse crescente.

Demonstrámos os teoremas 1 e 2 no caso em que a curva é definida por uma equação explícita $y = f(x)$.

Estes teoremas são igualmente válidos no caso em que a curva é definida por equações paramétricas. A demonstração é idêntica.

Nota — Indiquemos um processo mecânico elementar que permite construir a curva (evolvente) a partir da sua evoluta.

Demos a uma régua flexível a forma da evoluta C_0C_5 (fig. 152). Suponhamos que uma das extremidades dum fio inextensível é fixado

no ponto C_0 e toma a forma da régua. Se desenrolarmos o fio conservando-o esticado, a outra extremidade descreverá a curva M_5M_0 que é a evolvente. É, de resto, esta propriedade quem deu à curva o nome de evolvente. Pode-se demonstrar, apoiando-se nas propriedades da evoluta, estabelecidas mais acima, que a curva assim traçada é precisamente a evolvente.

Notemos igualmente que a cada evoluta dada, corresponde uma infinidade de evolventes (fig. 152).

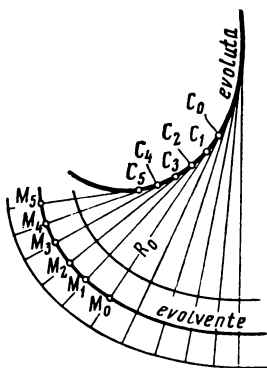
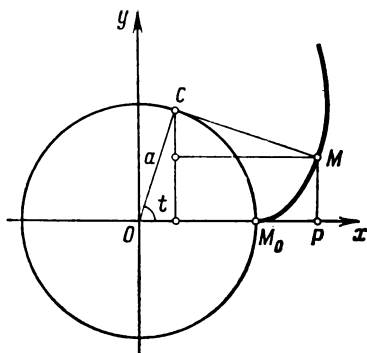



Fig. 152 Fig. 153

Exemplo — Seja um círculo de raio a (fig. 153). Escolhamos entre as evolventes deste círculo a que passa pelo ponto M_0 $(a, 0)$.

Encontra-se fàcilmente a equação da evolvente do círculo, notando que $CM = \widehat{CM_0} = at$:

$$OP = x = a\,(\cos t + t \operatorname{sen} t),$$
$$PM = y = a\,(\operatorname{sen} t - t \cos t).$$

Notemos que, na maioria dos casos, os cortes verticais dos dentes duma engrenagem têm a forma da evolvente do círculo.

§ 8. Cálculo aproximado das raízes reais duma equação

Os métodos de estudo da variação das funções permitem o cálculo dos valores aproximados das raízes da equação

$$f(x) = 0.$$

Se é uma equação algébrica (*) do primeiro, segundo, terceiro ou quarto grau, existem, então, fórmulas que dão as raízes desta

(*) Diz-se que $f(x) = 0$ é uma equação algébrica se $f(x)$ é um polinómio (ver § 6, Cap. VII).

equação em função dos seus coeficientes depois de um número finito de operações de adição, subtracção, multiplicação, divisão e de extracção de raíz. Tais fórmulas não existem no caso geral, se o grau dessas equações for superior a quatro. Se os coeficientes de uma equação qualquer, algébrica ou não (transcendente), não forem letras, mas números, é, então, possível calcular o valor aproximado das raízes desta equação com o grau de precisão desejado. Notemos, igualmente, que o emprego dos métodos práticos do cálculo de valores aproximados das raízes duma equação dada, impõe-se frequentemente,

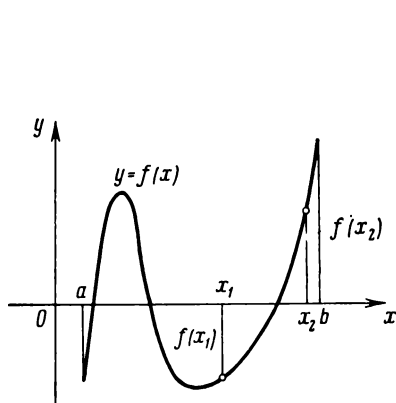
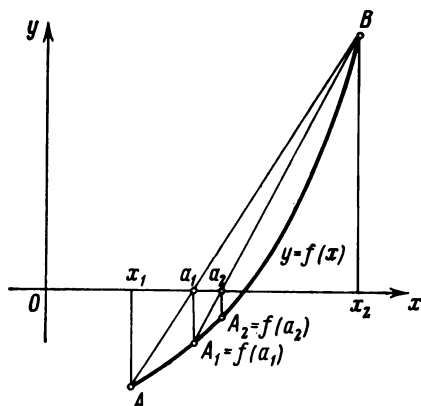



Fig. 154 Fig. 155

mesmo no caso em que o valor exacto das raízes da equação algébrica possa ser expresso por radicais. Exporemos, a seguir, certos métodos de cálculo do valor aproximado das raízes duma equação.

1. *Método das cordas* (*). Seja

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

uma equação, em que $f(x)$ é uma função contínua sobre o segmento $[a, b]$, cuja derivada de ordem dois existe. De acordo com o estudo da função $f(x)$, suponhamos que no intervalo (a, b) existe um segmento $[x_1, x_2]$, no interior do qual a função é monótona (crescente ou decrescente) e que toma valores de sinais contrários nas extremidades desse segmento. Tomemos, para fixar ideias, $f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$ (fig. 154). A função $y = f(x)$ sendo contínua

(*) Este método chama-se igualmente método de Legrange ou método das partes proporcionais.

sobre o segmento $[x_1, x_2]$, o seu gráfico deve necessàriamente cortar o eixo Ox num ponto do intervalo (x_1, x_2).

Tracemos a corda AB juntando os pontos da curva de abcissas x_1 e x_2. A abcissa a_1 do ponto de intersecção desta corda com o eixo Ox, será o valor aproximado da raíz (fig. 155). Para determinar este valor aproximado, formemos a equação da recta AB que passa pelos pontos dados A $[x_1, f(x_1)]$ e B $[x_2, f(x_2)]$:

$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Como $y = 0$ para $x = a_1$, temos:

$$\frac{-f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{a_1 - x_1}{x_2 - x_1},$$

donde

$$a_1 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1) f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}. \qquad (2)$$

A fim de obter uma melhor aproximação do valor da raíz, determinemos $f(a_1)$. Se $f(a_1) < 0$, repetimos o processo que acabamos de indicar, aplicando a fórmula (2) no segmento $[a_1, x_2]$. Se $f(a_1) > 0$, aplicamos esta fórmula no segmento $[x_1, a_1]$.

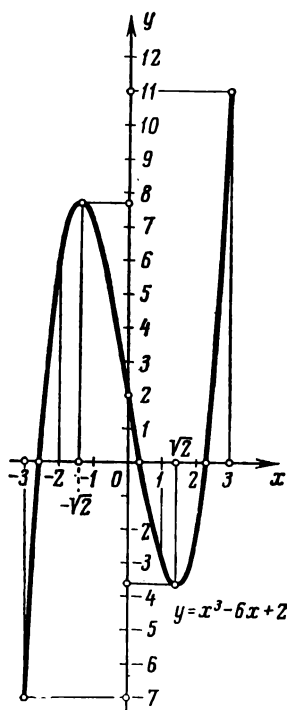
Aplicando este processo várias vezes, encontramos uma aproximação sempre melhor a_2, a_3, etc., da raíz procurada.

Fig. 156

Exemplo — 1. Determinar os valores aproximados das raízes da equação

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0.$$

Resolução — Determinamos, em primeiro lugar, os intervalos de monotonia, da função. O cálculo da derivada $f'(x) = 3x^2 - 6$ mostra que esta última é positiva para $x < -\sqrt{2}$, negativa para $-\sqrt{2} < x < +\sqrt{2}$, e de novo positiva para $x > \sqrt{2}$ (fig. 156). A função tem, pois, três intervalos de monotonia; no interior de cada um deles encontra-se uma raíz.

A fim de simplificar os cálculos ulteriores, estreitamos os intervalos de monotonia (tendo em atenção que em cada intervalo se encontra a raíz correspondente).

Para isso, tendo escolhido ao acaso certos valores de x e tendo-os substituído na expressão de $f(x)$, delimitam-se os intervalos de monotonia menores nas extremidades dos quais a função toma os valores de sinais contrários:

$$\left.\begin{matrix} x_1 = 0, & f(0) = 2, \\ x_2 = 1, & f(1) = -3, \end{matrix}\right\}$$
$$\left.\begin{matrix} x_3 = -3, & f(-3) = -7, \\ x_4 = -2, & f(-2) = 6, \end{matrix}\right\}$$
$$\left.\begin{matrix} x_5 = 2, & f(2) = -2, \\ x_6 = 3, & f(3) = 11. \end{matrix}\right\}$$

As raízes encontram-se, pois, no interior dos intervalos

$$(0;\ 1),\ (-3;\ -2),\ (2;\ 3).$$

Calculemos o valor aproximado da raíz compreendida no intervalo (0; 1). Em virtude da fórmula (2), temos:

$$a_1 = 0 - \frac{(1-0)\,2}{-3-2} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Mas

$$f(0{,}4) = 0{,}4^3 - 6\cdot 0{,}4 + 2 = -0{,}336,\ f(0) = 2,$$

por conseguinte, a raíz está compreendida entre 0 e 0,4. Apliquemos de novo a fórmula (2) no intervalo (0; 0,4); encontramos o valor aproximado seguinte:

$$a_2 = 0 - \frac{(0{,}4-0)\cdot 2}{-0{,}336-2} = \frac{0{,}8}{2{,}336} = 0{,}342, \text{ etc.}$$

Proceder-se-á do mesmo modo para achar os valores aproximados das raízes compreendidas nos outros intervalos.

2. *Método das tangentes* (método de Newton). Suponhamos, de novo, que $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ e que, além disso, a derivada primeira conserva o seu sinal sobre o segmento $[x_1, x_2]$. Então, o intervalo (x_1, x_2), contém apenas uma única raíz da equação $f(x) = 0$. Suponhamos, além disso, que a derivada segunda conserva, igualmente, o seu sinal sobre o segmento $[x_1, x_2]$; podemos chegar aí, reduzindo o comprimento do intervalo, que contém a raíz.

Do facto da derivada segunda não mudar o seu sinal sobre o segmento $[x_1, x_2]$, deduz-se que a curva é, ou convexa, ou côncava sobre este segmento.

Tracemos a tangente à curva no ponto B (fig. 157). A abcissa a_1 do ponto de encontro desta tangente com o eixo Ox, será o valor aproximado da raíz procurada. Formemos a equação da tangente no ponto B para achar esta abcissa:

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2).$$

Notando que $y = 0$ para $x = a_1$, temos:

$$a_1 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}. \tag{3}$$

Traçando em seguida a tangente à curva no ponto B_1, deduzimos, uma melhor aproximação a_2 da raíz. Repetindo-se este processo um número de vezes suficientemente grande, pode-se calcular o valor aproximado da raíz com o grau de precisão desejado.

Chamemos a atenção para o seguinte ponto. Se tivesemos traçado a tangente à curva não no ponto B mas no ponto A, o ponto de encontro desta tangente com o eixo Ox, poder-se-ia ter encontrado fora do intervalo (x_1, x_2).

Vê-se imediatamente, das figuras 157 e 158, que se deve traçar a tangente à curva na extremidade do arco onde os sinais da função e da sua derivada segunda coincidem. Por hipótese, a derivada segunda

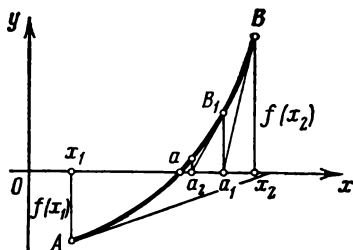
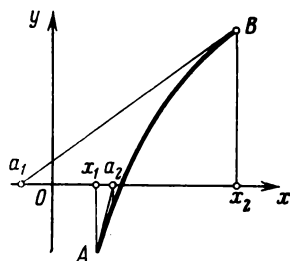



Fig. 157 Fig. 158

conserva o seu sinal e, por conseguinte, os sinais da função e da derivada segunda coincidirão, necessàriamente, numa das extremidades. Esta regra é igualmente válida para o caso $f'(x) < 0$. Se se traça a tangente no ponto da curva cuja abcissa é a extremidade esquerda do intervalo, é preciso substituir na fórmula (3) x_2 por x_1:

$$a_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \qquad (3')$$

Se no interior do intervalo (x_1, x_2) se encontra um ponto de inflexão C, o método das tangentes pode dar um valor aproximado da raíz situada fora do intervalo (x_1, x_2) (fig. 159).

Exemplo — 2. Apliquemos a fórmula (3) no cálculo da raíz da equação

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0,$$

situada no intervalo (0; 1). Temos:

$$f(0) = 2, \; f'(0) = (3x^2 - 6)\,|_{x=0} = -6,$$

eis porque encontramos em virtude da fórmula (3):

$$a_1 = 0 - \frac{2}{-6} = \frac{1}{3} = 0{,}333.$$

3. *Método combinado* (fig. 160). Aplicando simultâneamente ao segmento $[x_1, x_2]$ o método das cordas e o método das tangentes,

obtém-se dois pontos a_1 e $\bar{a}_1$, dispostos de um e de outro lado da raíz a procurada, (visto que, $f(a_1)$ e $f(\bar{a}_1)$, têm sinais diferentes). Aplica-se em seguida ao segmento $[a_1, \bar{a}_1]$ o método das cordas e o método das tangentes. Encontramos dois números a_2 e $\bar{a}_2$, que estão ainda mais próximos do valor da raíz.

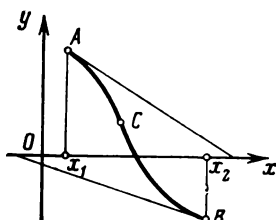



Fig. 159

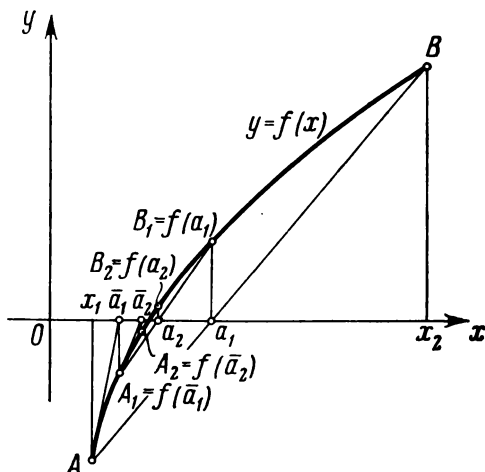



Fig. 160

Aplica-se, sucessivamente, este método até que a diferença dos valores aproximados assim obtidos, seja inferior à margem de precisão desejada.

Notemos que aplicando o método combinado aproximamo-nos do valor procurado da raíz dos dois lados ao mesmo tempo (isto é, que determinamos simultâneamente os valores aproximados por excesso e por defeito da raíz).

Assim, verifica-se para o exemplo considerado que

$$f(0{,}333) > 0, \quad f(0{,}342) < 0.$$

Por conseguinte, o valor da raíz está compreendido entre os valores aproximados calculados:

$$0{,}333 < x < 0{,}342.$$

Exercícios

Determinar a curvatura das curvas nos pontos indicados:

1. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ nos pontos $(0, b)$ e $(a, 0)$. **Resp.** $\frac{b}{a^2}$ no ponto $(0, b)$; $\frac{a}{b^2}$ no ponto $(a, 0)$.

2. $xy = 12$ no ponto $(3; 4)$. **Resp.** $\frac{24}{125}$.

3. $y=x^3$ no ponto (x_1, y_1). Resp. $\dfrac{6x_1}{(1+9x_1^4)^{3/2}}$.

4. $16y^2=4x^4-x^6$ no ponto $(2, 0)$. Resp. $\dfrac{1}{2}$.

5. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ no ponto arbitrário. Resp. $\dfrac{1}{3(axy)^{1/3}}$.

Determinar o raio de curvatura das curvas nos pontos indicados; construir cada curva e o círculo de curvatura correspondente:

6. $y^2=x^3$ no ponto $(4; 8)$. Resp. $R=\dfrac{80\sqrt{10}}{3}$.

7. $x^2=4ay$ no ponto $(0; 0)$. Resp. $R=2a$.

8. $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ no ponto (x_1, y_1). Resp. $R=\dfrac{(b^4x_1+a^4y_1)^{3/2}}{a^4b^4}$.

9. $y=\operatorname{Log} x$ no ponto $(1 ; 0)$. Resp. $R=2\sqrt{2}$.

10. $y=\operatorname{sen} x$ no ponto $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$. Resp. $R=1$.

11. $\left.\begin{array}{l} x=a\cos^3 t \\ y=a\operatorname{sen}^3 t \end{array}\right\}$ para $t=t_1$. Resp. $R=3a\operatorname{sen} t_1 \cos t_1$.

Determinar o raio de curvatura das seguintes curvas:

12. $\left.\begin{array}{l} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{array}\right\}$ para $t=1$. Resp. $R=6$.

13. A circunferência $\rho=a\operatorname{sen}\theta$. Resp. $R=\dfrac{a}{2}$.

14. A espiral de Arquímedes $\rho=a\theta$. Resp $R=\dfrac{(\rho^2+a^2)^{3/2}}{\rho^2+2a^2}$.

15. A cardioide $\rho=a(1-\cos\theta)$. Resp. $R=\dfrac{2}{3}\sqrt{2a\rho}$.

16. A lemniscata $\rho^2=a^2\cos 2\theta$. Resp. $R=\dfrac{a^2}{3\rho}$.

17. A parábola $\rho=a\sec^2\dfrac{\theta}{2}$. Resp. $R=2a\sec^3\dfrac{\theta}{2}$.

18. $\rho=a\operatorname{sen}^3\dfrac{\theta}{3}$. Resp. $R=\dfrac{3}{4}a\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{3}$.

Determinar os pontos das curvas onde o raio de curvatura é menor:

19. $y=\operatorname{Log} x$. Resp. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2}\operatorname{Log} 2\right)$.

20. $y=e^x$. Resp. $\left(-\dfrac{1}{2}\operatorname{Log} 2, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

21. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$. Resp. $\left(\dfrac{a}{4}, \dfrac{a}{4}\right)$.

22. $y=a\operatorname{Log}\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$. Resp. No ponto $(0, 0)$ $R=\dfrac{a}{2}$.

Determinar as coordenadas do centro da curvatura (α, β) e a equação da evoluta de cada uma das curvas seguintes

23. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Resp. $\alpha = \frac{(a^2+b^2)x^3}{a^4}$; $\beta = -\frac{(a^2+b^2)y^3}{b^4}$.

24. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Resp. $\alpha = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$; $\beta = y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$.

25. $y^3 = a^2x$. Resp. $\alpha = \frac{a^4 + 15y^4}{6a^2y}$; $\beta = \frac{a^4y - 9y^5}{2a^4}$.

26. $\begin{cases} x = 3t, \\ y = t^2 - 6. \end{cases}$ Resp. $\alpha = -\frac{4}{3}t^3$; $\beta = 3t^2 - \frac{3}{2}$.

27. $\begin{cases} x = k \operatorname{Log} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - k \cos t, \\ y = k \operatorname{sen} t. \end{cases}$ Resp. $y = \frac{k}{2}(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}})$ (tractriz).

28. $\begin{cases} x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \\ y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t). \end{cases}$ Resp. $\begin{matrix} \alpha = a \cos t; \\ \beta = a \operatorname{sen} t. \end{matrix}$

29. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \operatorname{sen}^3 t. \end{cases}$ Resp. $\begin{matrix} \alpha = a \cos^3 t + 3a \cos t \operatorname{sen}^2 t; \\ \beta = a \operatorname{sen}^3 t + 3a \cos^2 t \operatorname{sen} t. \end{matrix}$

30. Calcular as raízes da equação $x^3 - 4x + 2 = 0$, aproximadamente a 0,001. Resp. $x_1 = 1{,}675$, $x_2 = 0{,}539$, $x_3 = -2{,}214$.

31. Calcular o valor aproximado da raíz da equação $f(x) = x^5 - x - 0{,}2 = 0$, compreendida no intervalo (1; 1,1). Resp. 1,045.

32. Calcular as raízes da equação $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$, aproximadamente a 0,01. Resp. $0{,}38 < x_1 < 0{,}39$; $1{,}24 < x_2 < 1{,}25$.

33. Determinar o valor aproximado das raízes da equação $x^3 - 5 = 0$.

Resp. $x_1 \approx 1{,}71$, $x_{2,3} = 1{,}71 \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

34. Achar o valor aproximado da raíz da equação $x - \operatorname{tg} x = 0$, compreendido entre 0 e $\frac{3\pi}{2}$. Resp. 4,4935.

35. Achar a raíz aproximada da equação $\operatorname{sen} x = 1 - x$, aproximadamente a 0,001. Indicação. Pôr a equação sob a forma $f(x) = 0$. Resp. $0{,}5110 < x < 0{,}5111$.

Problemas diversos

36. Mostrar que em cada ponto da lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ a curvatura é proporcional ao raio vector nesse ponto.

37. Determinar o maior valor do raio de curvatura da curva $\rho = a \operatorname{sen}^3 \frac{\varphi}{3}$.

Resp. $R = 3a/4$.

38. Achar as coordenadas do centro de curvatura da curva $y = x \operatorname{Log} x$ no ponto em que $y' = 0$. Resp. $(e^{-1}, 0)$.

39. Demonstrar que para os pontos da espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ o valor da diferença entre o raio vector e o raio de curvatura, tende para zero quando $\varphi \to \infty$.

40. Achar a parábola $y = ax^2 + bx + c$, tendo com a sinusóide $y = \operatorname{sen} x$ uma tangente comum e a mesma curvatura no ponto $(\pi/2, 1)$. Fazer um desenho. Resp. $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2} + 1 - \frac{\pi^2}{8}$.

A função $y = f(x)$ é assim determinada:

$$f(x) = x^3 \text{ sobre o intervalo } -\infty < x \leqslant 1,$$
$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ sobre o intervalo } 1 < x < +\infty.$$

41. Quais devem ser os valores de a, b, c para que a curva $y = f(x)$ tenha sempre uma curvatura contínua? Fazer um desenho. Resp. $a = 3$, $b = -3$, $c = 1$.

42. Mostrar que o raio de curvatura duma ciclóide é em cada ponto o dobro do comprimento da normal nesse ponto.

43. Escrever a equação do circulo de curvatura da parábola $y = x^2$ no ponto (1, 1). Resp. $(x+4)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$.

44. Escrever a equação do círculo de curvatura da curva $y = \operatorname{tg} x$ no ponto $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$. Resp. $\left(x - \frac{\pi - 10}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$.

45. Achar o comprimento da evoluta da elipse, cujos semi-eixos são iguais a a e b. Resp. $4(a^3 - b^3)/ab$.

46. Achar o valor aproximado das raízes da equação $xe^x = 2$, aproximadamente a 0,01. Resp. A equação tem uma raíz real única $x \approx 0{,}84$.

47. Achar o valor aproximado das raízes da equação $x \operatorname{Log} x = 0{,}8$, aproximadamente a 0,01. A equação tem uma raíz real única $x \approx 1{,}64$.

48. Achar o valor aproximado das raízes da equação $x^2 \operatorname{arc tg} x = 1$, aproximadamente a 0,01. Resp. A equação tem uma raíz real única $x \approx 1{,}096$.

Capítulo VII

NÚMEROS COMPLEXOS. POLINÓMIOS

§ 1. Números complexos. Definições

Chama-se *número complexo a* toda a expressão da forma

$$a + bi, \qquad (1)$$

em que a e b são números *reais* e i a *unidade imaginária* definida pela relação

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad i^2 = -1\,; \qquad (2)$$

a chama-se parte *real* e bi a parte *imaginária* do número complexo. Diz-se que dois números complexos $a + bi$ e $a - bi$ são *conjugados*, se eles apenas diferem pelo sinal da sua parte imaginária.

Se $a = 0$, o número $0 + bi = bi$ diz-se *imaginário puro;* se $b = 0$, encontra-se um número real: $a + 0i = a$.

Adopta-se duas convenções fundamentais:

1) dois números complexos $a_1 + b_1 i$ e $a_2 + b_2 i$, são iguais se

$$a_1 = a_2, \qquad b_1 = b_2\,;$$

2) um número complexo é igual a zero:

$$a + bi = 0$$

se, e sòmente se, $a = 0$, $b = 0$.

1. *Representação geométrica dos números complexos* — Todo o número complexo $a + bi$ pode ser representado sobre o plano Oxy por um ponto $A\,(a, b)$ de coordenadas a e b (fig. 161), e, recìprocamente, todo o ponto $M\,(a, b)$ do plano Oxy pode ser considerado como a imagem geométrica do número complexo $a + bi$ (*).

Mas se a todo o ponto $A\,(a, b)$ corresponde um número complexo $a + bi$, então, em particular, a todo o ponto do eixo Ox corresponde um número real ($b = 0$). Todo o ponto do eixo Oy representa um número imaginário puro, visto que neste caso $a = 0$.

(*) $a + bi$, é, então, chamado o afixo do ponto $M\,(a, b)$.

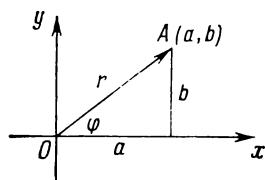
Eis porque, a respeito de uma tal representação dos números complexos sobre o plano, se chama ao eixo *Oy eixo imaginário* e ao eixo *Ox eixo real.*

Juntando o ponto $A(a, b)$ à origem das coordenadas, obtém-se o vector $\overline{OA}$.

Por razões de comodidade, compara-se muitas vezes o número complexo $a + bi$ ao vector $\overline{OA}$ correspondente.

2. *Forma trigonométrica dos números complexos* — Designemos por φ e r ($r \geqslant 0$) as coordenadas polares do ponto $A(a, b)$, tomando a origem das coordenadas para pólo e o sentido positivo do eixo Ox para eixo polar. Então, (fig. 161) tem-se as relações seguintes:

Fig. 161

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r \operatorname{sen}\varphi$$

e, por conseguinte, todo o número complexo pode ser posto sob a forma

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi). \qquad (3)$$

A expressão que figura no membro direito desta relação é a forma trigonométrica do número complexo $a + bi$. As quantidades r e φ exprimem-se em função de a e b pelas fórmulas

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \varphi = \operatorname{Arc\,tg}\frac{b}{a}.$$

r diz-se *módulo* e φ *argumento* do número complexo $a + bi$.

O argumento do número complexo, o ângulo φ, é positivo se é contado a partir do eixo dos x positivos no sentido inverso dos ponteiros dum relógio e negativo no caso contrário. É evidente, que o argumento φ não é definido duma maneira unívoca, mas próximo de $2\pi k$, em que k é um número inteiro qualquer.

Designa-se, por vezes, o módulo r dum número complexo $a + bi$ pelo símbolo $|a + bi|$:

$$r = |a + b|.$$

Notemos que todo o número real A pode ser igualmente posto sob a forma (3), a saber:

$$A = |A|(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0) \text{ quando } A > 0,$$
$$A = |A|(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi) \text{ quando } A < 0.$$

O módulo do número complexo 0 é igual a zero: $|0| = 0$. Pode-se tomar para argumento do número zero um ângulo φ qualquer. Com efeito, qualquer que seja φ, ter-se-á

$$0 = 0\cdot(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$$

§ 2. Principais operações sobre os números complexos

1. *Adição dos números complexos* — A soma de dois números complexos $a_1 + b_1 i$ e $a_2 + b_2 i$ é o número complexo definido pela igualdade

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i. \qquad (1)$$

Vê-se, da fórmula (1), que a adição dos números complexos representados sob a forma de vectores, satisfaz as regras da adição dos vectores.

2. *Subtracção dos números complexos* — A diferença de dois números complexos $a_2 + b_2 i$ e $a_1 + b_1 i$ é o número complexo que, somado a $a_1 + b_1 i$, dá $a_2 + b_2 i$.

Vê-se, fàcilmente, que

$$(a_2 + b_2 i) - (a_1 + b_1 i) =$$
$$= (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)\, i. \qquad (2)$$

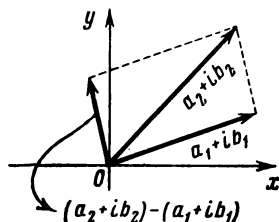



Fig. 162

Notemos que o módulo da diferença de dois números complexos, $\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$ é igual à distância entre os dois pontos correspondentes do plano complexo (fig. 162).

3. *Multiplicação dos números complexos* — O produto dos números complexos $a_1 + b_1 i$ e $a_2 + b_2 i$ é o número complexo que se obtém multiplicando estes números como binómios, segundo as regras do cálculo algébrico e tendo em atenção as relações:

$$i^2 = -1\,; \quad i^3 = (-1)\, i = -i\,; \quad i^4 = (-i)\,(i) = -i^2 = 1\,;$$

$$i^5 = 1 \cdot i, \quad \text{etc.},$$

e, em geral, para todo o inteiro k:

$$i^{4k} = 1\,; \quad i^{4k+1} = i\,; \quad i^{4k+2} = -1\,; \quad i^{4k+3} = -i.$$

Em virtude desta regra, temos:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2$$

ou

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)\, i. \qquad (3)$$

Se os números complsxos são dados sob a forma trigonométrica, ter-se-á:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2 [\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 + i \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 +$$
$$+ i^2 \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2] = r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2) +$$
$$+ i(\operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2)] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) +$$
$$+ i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Assim, $r_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2) =$

$$= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)], \qquad (3')$$

isto é, *o produto de dois números complexos é um número complexo cujo módulo é igual ao produto aos módulos dos factores e o argumento à soma dos argumentos das factores.*

Nota — 1. Em virtude da fórmula (3), os números complexos conjugados $a + bi$ e $a - bi$, verificam a relação

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2,$$

isto é, que o produto de dois números complexos conjugados é um número real, igual à soma dos quadrados dos seus módulos.

4. *Divisão de números complexos* — A divisão de dois números complexos é a operação inversa do seu produto; se

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = x + yi$$

(em que $\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$), então, x e y devem ser tais, que se tenha

$$a_1 + b_1 i = (a_2 + b_2 i)(x + yi)$$

ou

$$a_1 + b_1 i = (a_2 x - b_2 y) + (a_2 y + b_2 x)\, i.$$

Por conseguinte,

$$a_1 = a_2 x - b_2 y, \quad b_1 = b_2 x + a_2 y,$$

donde encontramos:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \qquad y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

e temos finalmente:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i. \qquad (4)$$

Na prática, procede-se da seguinte maneira para efectuar a divisão de dois números complexos; para dividir $a_1 + b_1 i$ por $a_2 + b_2 i$, multiplica-se o dividendo e o divisor pelo número complexo conjugado do divisor (isto é, por $a_2 - b_2 i$). O divisor torna-se, então, um número real; dividindo por este número real a parte real e a parte imaginária do dividendo, obtém-se o quociente:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

No caso dos números complexos, expressos sob a forma trigonométrica, tem-se:

$$\frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Para verificar esta igualdade, basta multiplicar o divisor pelo quociente:

$$r_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2) \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + \quad \operatorname{sen} (\varphi_1 - \varphi_2)] =$$

$$= r_2 \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2)] =$$

$$= r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1).$$

Assim, *o módulo do quociente de dois números complexos, é igual ao quociente dos módulos do dividendo e do divisor; o argumento do quociente é igual à diferença dos argumentos respectivos do dividendo e do divisor.*

Nota — 2. As regras que regem as operações efectuadas com os números complexos mostram que a soma, a diferença, o produto e o quociente dos números complexos são também números complexos.

Se se aplica aos números reais, considerados como um caso particular dos números complexos, as regras que regem as operações efectuadas com os números complexos, vê-se que elas concordam com as regras usuais de aritmética.

Nota — 3. Voltando às definições da soma, da diferença, do produto e do quociente dos números complexos, verifica-se fàcilmente, que se se os substituir pelos seus conjugados respectivos, os resultados das operações indicadas devem também ser substituídos pelos seus conjugados. Em particular, resulta o teorema seguinte.

Teorema — *Se no polinómio de coeficientes reais*

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$$

se substitui por x *o número* a + bi, *depois o número conjugado* a — bi, *os resultados obtidos, serão, respectivamente, conjugados.*

§ 3. Elevação dum número complexo a uma potência e extracção da raíz dum número complexo

1. *Elevação a uma potência* — Resulta da fórmula (3') do parágrafo precedente, que se n é um inteiro positivo, então,

$$[r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi). \tag{1}$$

Esta fórmula *é chamada fórmula de Moivre.* Ela mostra *que quando se eleva um número complexo a uma potência inteira e positiva, o módulo deste número é elevado a esta potência e o argumento é multiplicado pelo expoente desta potência.*

Prestemos atenção a uma aplicação da fórmula de Moivre.

Fazendo nesta fórmula $r = 1$, temos:

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi.$$

Desenvolvendo o primeiro membro, segundo a fórmula do binómio de Newton, e identificando as partes reais e os coeficientes de i, pode-se exprimir $\operatorname{sen} n\varphi$ e $\cos n\varphi$ em função das potências de $\operatorname{sen}\varphi$ e $\cos\varphi$. Por exemplo, para $n = 3$, temos:

$$\cos^3\varphi + i3\cos^2\varphi\cdot\operatorname{sen}\varphi - 3\cos\varphi\cdot\operatorname{sen}^2\varphi - i\operatorname{sen}^3\varphi =$$

$$= \cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi.$$

Resulta da igualdade destes números complexos, que

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi,$$

$$\operatorname{sen} 3\varphi = -\operatorname{sen}^3\varphi + 3\cos^2\varphi \quad \varphi.$$

2. *Extracção da raíz* — Chama-se raíz n dum número complexo, ao número complexo que, elevado à potência n, dá o número que figura debaixo da raíz, isto é,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\ \text{sen}\ \varphi)} = \rho(\cos\psi + i\ \text{sen}\ \psi),$$

se

$$\rho^n(\cos n\psi + i\ \text{sen}\ n\psi) = r(\cos\varphi + i\ \text{sen}\ \varphi).$$

Visto que, para dois números complexos iguais, os seus módulos são iguais e a diferença dos seus argumentos é um múltiplo de 2π, podemos escrever:

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi.$$

Donde encontramos:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

em que k é um inteiro arbitrário, e $\sqrt[n]{r}$ a raíz aritmética (isto é, um número real positivo) do número positivo r. Por conseguinte,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\ \text{sen}\ \varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\ \text{sen}\ \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \quad (2)$$

Dando a k os valores $0, 1, 2, \ldots, n-1$ encontramos n valores diferentes da raíz. Cada valor da raíz obtida, dando a k um valor maior que $n - 1$, não se distingue de qualquer dos valores precedentes, a não ser por um múltiplo de 2π e, por conseguinte, estes dois valores da raíz identificam-se.

A raíz índice n dum número complexo tem, pois, n valores diferentes.

A raíz índice n do número real A, diferente de zero, tem igualmente n valores diferentes, visto que os números reais são um caso particular dos números complexos e podem ser expressos, igualmente, sob a forma trigonométrica:

$$\text{se } A > 0, \quad \text{então, } A = |A|(\cos 0 + i\ \text{sen}\ 0);$$

$$\text{se } A < 0, \quad \text{então, } A = |A|(\cos\pi + i\ \text{sen}\ \pi).$$

Exemplo — 1. Seja calcular as raízes cúbicas' da unidade.

Resolução — Escrevamos a unidade sob a forma trigonométrica:

$$1 = \cos 0 + i\ \text{sen}\ 0.$$

Obtemos a fórmula (2):

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\ \text{sen}\ 0} = \cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i\ \text{sen}\ \frac{0 + 2k\pi}{3}.$$

Para $k = 0, 1, 2$, temos os três valores da raíz:

$$x_1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1 \; ; \quad x_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \; ; \quad x_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}.$$

Ora,

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \; ; \quad \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \quad \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} \; ; \quad \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

temos, por conseguinte:

$$x_1 = 1 \; ; \quad x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \quad x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Os pontos A, B, C da figura 163, são as imagens geométricas das raízes obtidas.

3. *Resolução das equações binómias* — Chama-se equação binómia, a toda a equação da forma

$$x^n = A.$$

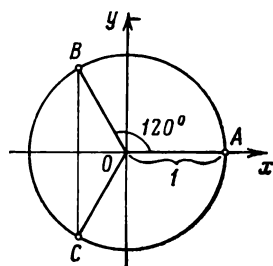



Fig. 163

Procuremos as raízes desta equação. Se A é um número real positivo, então,

$$x = \sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

A expressão, entre parêntesis, dá todos os valores da raíz índice n da unidade.

Se A é um número real negativo, então,

$$x = \sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\pi + 2k\pi}{n}\right).$$

A expressão entre parêntesis dá todos os valores da raíz índice n de -1.

Se A é um número complexo, acha-se os valores de x a partir da fórmula(2).

Exemplo — 2. Resolver a equação

$$x^4 = 1.$$

Resolução.

$$x = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + i \operatorname{sen} 2k\pi} = \cos\frac{2k\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{4}.$$

Para $k = 0, 1, 2, 3$, temos:

$$x_1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1,$$

$$x_2 = \cos \frac{2\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{4} = i,$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{4} = -1,$$

$$x_4 = \cos \frac{6\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{6\pi}{4} = -i.$$

§ 4. Função exponencial de expoente complexo e suas propriedades

Seja $z = x + iy$. Se x e y são variáveis reais, z é uma variável complexa. A cada valor da variável z, corresponde um ponto bem determinado (fig. 161) no plano Oxy (*plano da variável complexa*).

Definição — Diz-se que w é *uma função da variável complexa* z, se a cada valor da variável z, tomada num certo domínio do plano da variável complexa, corresponde um valor bem definido da variável complexa w; *esta função da variável complexa* é anotada por: $w = f(z)$ ou $w = w(z)$.

Consideraremos aqui uma única função de variável complexa, a função exponencial

$$w = e^z$$

ou

$$w = e^{x+iy}.$$

Os valores complexos da função w definem-se como se segue (*):

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y), \tag{1}$$

isto é,

$$w(z) = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y). \tag{2}$$

Exemplos.

1) $z = 1 + \frac{\pi}{4} i$, $e^{1+\frac{\pi}{4}i} = e\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right) = e\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

2) $z = 0 + \frac{\pi}{2} i$, $e^{0+\frac{\pi}{2}i} = e^0 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = i$,

3) $z = 1 + i$, $e^{1+i} = e^1 (\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) = 0,54 + i \cdot 0,83$,

4) $z = x$, número real, $e^{x+0i} = e^x (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^x$ é a função exponencial ordinária.

(*) O bom fundamento duma tal definição da função exponencial da variável complexa, aparecerá no seguimento, ver § 21, Cap. XIII e § 18, Cap. XVI, t. II.

Propriedades da função exponencial — 1. Se z_1 e z_2 são dois números complexos, então,

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}. \tag{3}$$

Demonstração — Seja,

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2;$$

então,

$$e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} =$$

$$= e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2) + i \operatorname{sen}(y_1+y_2)]. \tag{4}$$

Por outra via, em virtude do teorema relativo ao produto de dois números complexos, expressos sob a forma trigonométrica, temos:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) \times$$

$$\times e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) = e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2) + i \operatorname{sen}(y_1+y_2)]. \tag{5}$$

Os termos da direita nas igualdades (4) e (5) são iguais e, por conseguinte, os termos da esquerda são-no também:

2. Demonstra-se, duma maneira análoga, a fórmula

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}. \tag{6}$$

3. Se m é um número inteiro, tem-se:

$$(e^z)^m = e^{mz}. \tag{7}$$

Para $m > 0$ esta fórmula demonstra-se fàcilmente a partir da fórmula (3); se $m < 0$ esta fórmula é deduzida das fórmulas (3) e (6).

4. Demonstremos a identidade

$$e^{z+2\pi i} = e^z. \tag{8}$$

Com efeito, obtém-se das fórmulas (3) e (1):

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = e^z.$$

Resulta da identidade (8) que a função exponecial e^z é uma função periódica de período $2\pi i$.

5. Consideremos, agora, a quantidade complexa

$$w = u(x) + iv(x),$$

em que $u(x)$ e $v(x)$, são funções reais da variável real x. É o que se chama *uma função complexa da variável real x*.

a) Suponhamos que os limites

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = u(x_0), \qquad \lim_{x \to x_0} v(x) = v(x_0)$$

existem. Então, chama-se $u(x_0) + iv(x_0) = w_0$, o limite da variável complexa w.

b) Se as derivadas $u'(x)$ e $v'(x)$ existem, chama-se à expressão

$$w'_x = u'(x) + iv'(x) \tag{9}$$

a *derivada* da função complexa da variável real em relação a esta variável real.

Consideremos em seguida a função exponencial

$$w = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{(\alpha + i\beta)x},$$

em que α e β são números reais constantes e x uma variável real. É uma função complexa de variável real que se pode, em virtude da fórmula (1), pôr sob a forma:

$$w = e^{\alpha x}[\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x]$$

ou

$$w = e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

Calculemos a derivada w'_x. Em virtude da fórmula (9), temos:

$$w'_x = (e^{\alpha x} \cos \beta x)' + i(e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x)' =$$
$$= e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \operatorname{sen} \beta x) + ie^{\alpha x}(\alpha \operatorname{sen} \beta x + \beta \cos \beta x) =$$
$$= \alpha [e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)] + i\beta [e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)] =$$
$$= (\alpha + i\beta)[e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)] = \alpha + i\beta) e^{(\alpha + i\beta)x}$$

Logo, se $w = e^{(\alpha + i\beta)x}$, então, $w' = (\alpha + i\beta) e^{(\alpha + i\beta)x}$ ou

$$[e^{(\alpha + i\beta)x}]' = (\alpha + i\beta) e^{(\alpha + i\beta)x} \tag{10}$$

Assim, se k é um número complexo (em particular um número real) e x um número real, então,

$$(e^{kx})' = ke^{kx}. \tag{9'}$$

Obtemos a fórmula usual de derivação da função exponêncial. Por outra via,

$$(e^{kx})'' = [(e^{kx})']' = k\ e^{kx})' = k^2 e^{kx},$$

e, para n qualquer

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Estas fórmulas ser-nos-ão úteis no seguimento.

§ 5. Fórmula de Euler. Forma exponencial dum número complexo

Se se põe na fórmula (1) do parágrafo anterior $x = 0$, tem-se:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y. \tag{1}$$

É a *fórmula de Euler* que exprime o elo de ligação entre a função exponencial de expoente imaginário e as funções trigonométricas.

Substituindo na fórmula (1) y por $-y$, tem-se:

$$e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y. \tag{2}$$

Deduz-se das igualdades (1) e (2) a expressão de $\operatorname{sen} y$ e de $\cos y$:

$$\left.\begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Utiliza-se, em particular, estas últimas fórmulas para exprimir as potências de $\cos \varphi$ e $\operatorname{sen} \varphi$, bem como os seus produtos em função dos senos e de cossenos dos arcos múltiplos.

Exemplos — 1. $\cos^2 y = \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{i2y} + 2 + e^{-i2y}) =$

$$= \frac{1}{4}[(\cos 2y + i \operatorname{sen} 2y) + 2 + (\cos 2y - i \operatorname{sen} 2y)] =$$

$$= \frac{1}{4}(2 \cos 2y + 2) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2y).$$

2. $\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2 =$

$$= \frac{(e^{i2\varphi} - e^{-i2\varphi})^2}{4 \cdot 4i^2} = -\frac{1}{8}\cos 4\varphi + \frac{1}{8}.$$

Forma exponencial dos números complexos — Representemos o número complexo z sob a forma trigonométrica:

$$z = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi),$$

em que r é o módulo e φ o argumento deste número complexo. Em virtude da fórmula de Euler

$$\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi = e^{i\varphi}.$$

Por conseguinte, todo o número complexo pode ser posto sob a forma, dita *exponencial*:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Exemplos — Pôr os números 1, *i*, — 2, — i, sob a forma exponencial.

Resolução — $1=\cos 2k\pi+i \operatorname{sen} 2k\pi=e^{2k\pi i}$,

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i},$$

$$-2=2(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi)=2e^{\pi i},$$

$$-i=\cos\frac{\pi}{2}-i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

§ 6. Decomposição dum polinómio em factores

Chama-se *polinómio* ou *função racional inteira de x* a função

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n,$$

em que n é um número inteiro; como se sabe, o número n é chamado *grau de polinómio.* Os coeficientes A_0, A_1, ..., A_n são aqui números reais ou complexos. A variável independente x pode, igualmente, tomar ou valores reais ou valores complexos.

Chama-se *raíz* dum polinómio ao valor da variável x, para o qual o polinómio se anula.

Teorema — 1. (Teorema de Bézout). *O resto da divisão do polinómio* f (x) *pelo monómio* x − a *é igual a* f (a).

Demonstração — O quociente da divisão de $f(x)$ por $x-a$ é um polinómio $f_1(x)$ de grau inferior duma unidade ao do polinómio $f(x)$; o resto é um número constante R. Podemos, então, escrever

$$f(x)=(x-a)f_1(x)+R. \tag{1}$$

Esta igualdade é verdadeira para todos os valores de x diferentes de a (a divisão por $x-a$ não tem sentido para $x=a$).

Se agora x tende para a, o limite do primeiro membro da igualdade (1) será igual a $f(a)$ e o limite do segundo membro será igual a R. As funções $f(x)$ e $(x-a)\ f_1(x)+R$ sendo iguais para todos os valores de $x\neq a$, os seus limites quando $x\to a$ são também iguais, isto é, $f(a)=R$.

Corolário — *Se* a *é uma raíz do polinómio, isto é, se* f (a) = 0, f (x) *é divisível exactamente por* x − a, e pode ser, por conseguinte, posto sob a forma de produto

$$f(x)=(x-a)f_1(x),$$

em que $f_1(x)$ é um polinómio.

Exemplo — 1. O polinómio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ anula-se para $x = 1$, isto é, $f(1) = 0$, logo, o polinómio é divisível exactamente por $x - 1$:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Consideremos agora as equações a uma incógnita x.

Chama-se raíz duma equação a todo o número (real ou complexo) que, substituído em x na equação, a transforma em identidade.

Exemplo — 2. Os números $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{5\pi}{4}$; $x_3 = \frac{9\pi}{4}$ ... são as raízes da equação $\cos x = \operatorname{sen} x$.

Chama-se equação *algébrica* de grau n às equações da forma $P(x) = 0$ em que $P(x)$ é um polinómio de grau n. Resulta da definição que as raízes da equação algébrica $P(x) = 0$ se identificam às do polinómio $P(x)$.

Põe-se, naturalmente, a questão de saber se toda a equação tem raízes. A resposta é negativa, se se considera as equações não algébricas, porque existe equações deste género que não têm nem raízes reais nem raízes complexas: por exemplo, a equação $e^x = 0$ (*).

Todavia, se se considera as equações algébricas, deve-se responder pela afirmativa a esta questão. Neste caso, a resposta constitui o que se chama o teorema fundamental da álgebra.

Teorema — 2. (Teorema fundamental da álgebra). *Toda a função racional inteira* f(x) *tem, pelo menos, uma raíz real ou complexa.*

Demonstra-se este teorema na álgebra superior. Admitimo-lo aqui sem demonstração.

Servindo-nos do teorema fundamental da álgebra, demonstra-se fàcilmente a proposição seguinte.

Teorema — 3. *Todo o polinómio de grau* n *decompõe-se em* n *factores lineares da forma* x − a *e um factor igual ao coeficiente de* x^n.

Demonstração — Seja $f(x)$ um polinómio de grau n:

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n.$$

(*) Com efeito, se um número $x_1 = a + bi$ fosse a raíz desta equação, ter-se-ia a identidade $e^{a+bi} = 0$ (em virtude da fórmula de Euler), $e^a (\cos b + \operatorname{sen} b) = 0$. Mas e^a não se pode anular, qualquer que seja o expoente real a; do mesmo modo, $\cos b + i \operatorname{sen} b$ não é nulo (visto que o módulo deste número é igual a $\sqrt{\cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b} = 1$, qualquer que seja b). Por conseguinte, o produto $e^a (\cos b + i \operatorname{sen} b) \neq 0$, isto é, $e^{a+bi} \neq 0$, o que significa que a equação $e^x = 0$ não tem raízes.

Em virtude do teorema fundamental da álgebra, este polinómio tem, pelo menos, uma raíz; designemo-la por a_1. Então, em virtude do corolário do teorema de Bézout, podemos escrever:

$$f(x) = (x - a_1) \cdot f_1(x),$$

em que $f_1(x)$ é um polinómio de grau $(n - 1)$; $f_1(x)$ tem igualmente uma raíz. Designamo-la por a_2. Então,

$$f_1(x) = (x - a_2) \cdot f_2(x),$$

em que $f_2(x)$ é um polinómio de grau $(n - 2)$. Do mesmo modo,

$$f_2(x) = (x - a_3) \cdot f_3(x).$$

Procedendo, assim, o número de vezes necessário, chega-se à relação

$$f_{n-1}(x) = (x - a_n) f_n,$$

em que f_n é um polinómio de grau zéro, isto é, uma constante. Esta constante é igual, evidentemente, ao coeficiente de x^n, isto é, $f_n = A_0$.

Podemos, então, escrever em virtude das igualdades obtidas

$$f(x) = A_0 (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n). \tag{2}$$

Resulta da decomposição (2) que os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são as raízes do polinómio $f(x)$, visto que o segundo membro, e por conseguinte, o primeiro membro, é igual a zero desde que se substitui $x = a_1$, $x = a_2$, $x = a_3$, ..., $x = a_n$.

Exemplo — 3. O polinómio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, anula-se para

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3.$$

Por conseguinte,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Nenhum outro valor $x = a$, diferente de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pode se uma raíz do polinómio $f(x)$, visto que nenhum factor do segund membro da igualdade (2) se anula para $x = a$. Podemos, então, enunc a proposição seguinte.

Todo o polinómio de grau n *não pode ter mais de* n *raízes diferentes.* Este resultado conduz-nos a enunciar o teorema seguinte.

Teorema — 4. *Se os valores de dois polinómios* $\varphi_1(x)$ *e* $\varphi_2(x)$, *de grau* n, *coincidem para* $n + 1$ *valores diferentes* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *da variável independente* x, *então, estes dois polinómios são idênticos.*

Demonstração — Designemos por $f(x)$ a diferença destes polinómios

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

$f(x)$ é, por hipótese, um polinómio de grau não superior a n que que se anula nos pontos $a_1, \ldots, a_n$. Podemos, então, pô-lo sob a forma

$$f(x) = A_0 (x - a_1 (x - a_2) \ldots (x - a_n).$$

Mas, sempre segundo a hipótese, $f(x)$ anula-se igualmente no ponto a_0. Então, $f(a_0) = 0$, se bem que, nenhum dos factores lineares se anule. Deste modo, $A_0 = 0$, e resulta da igualdade (2) que o polinómio $f(x)$ é idênticamente nulo. Por conseguinte, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \equiv 0$ ou $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$.

Teorema — 5. *Se o polinómio*

$$P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$$

é idênticamente nulo, todos os seus coeficientes são, então, iguais a zero.

Demonstração — Decomponhamos este polinómio em factores. Em virtude da fórmula (2):

$$P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n =$$
$$= A_0 (x - a_1) \ldots (x - a_n). \qquad (1')$$

Se este polinómio é idênticamente nulo, deve sê-lo igualmente para um valor de x diferente de $a_1, \ldots, a_n$. Neste caso, os factores $x - a_1, \ldots, x - a_n$, não se anulam e, por conseguinte, $A_0 = 0$.
Demonstra-se, do mesmo modo, que, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, etc.

Teorema — 6. *Os coeficientes respectivos de dois polinómios idênticamente iguais, são iguais.*
Isto resulta do facto de a diferença destes polinómios ser um polinómio idênticamente nulo. Por conseguinte, em virtude do teorema anterior, todos os seus coeficientes são nulos.

Exemplo — 4. Se o polinómio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ é idênticamente igual ao polinómio $x^2 - 5x$, então, $a = 0$, $b = 1$, $c = -5$, $d = 0$.

§ 7. Raízes múltiplas do polinómio

Se certos factores lineares da decomposição dum polinómio de grau n

$$f(x) = A_0 (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) \qquad (1)$$

são iguais, pode-se, então, agrupá-los e decompôr este polinómio em factores da maneira seguinte

$$f(x) = A_0 (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_m)^{k_m}, \qquad (1')$$

onde

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n.$$

Neste caso, diz-se que a_1 é uma raíz múltipla de ordem k_1 e k_1 chama-se multiplicidade da raíz. Dir-se-á, do mesmo modo, que a_2 é uma raíz múltipla de ordem k_2, etc.

Exemplo — O polinómio $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, decompõe-se em factores da maneira seguinte:

$$f(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 1).$$

Esta decomposição pode-se pôr sob a forma:

$$f(x) = (x - 2)^2 (x - 1).$$

$a_1 = 2$, é uma raíz dupla e $a_2 = 1$, uma raíz simples.

Se o polinómio tem uma raíz múltipla a de ordem k, considerá-lo-emos como tendo k raízes iguais.

Resulta, então, do teorema relativo à decomposição dum polinómio em factores lineares, o teorema seguinte.

Todo o polinómio de grau n *tem, exactamente,* n *raízes (reais ou complexas).*

Nota — Tudo o que tem sido dito a respeito das raízes do polinómio

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$$

é igualmente verdadeiro para as raízes da equação algébrica

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n = 0.$$

Demonstremos, agora, o teorema seguinte.

Teorema — *Se* a_1 *é uma raíz múltipla de ordem* $k_1 > 1$ *para o polinómio* $f(x)$, *é, então, uma raíz de ordem* $k_1 - 1$ *para a derivada* $f'(x)$ *deste polinómio.*

Demonstração — Sendo a_1 uma raíz múltipla de ordem k_1 em que $k_1 > 1$, resulta da fórmula (1′) que:

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} \varphi(x),$$

em que $\varphi(x) = (x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_m)^{k_m}$ não se anula no ponto $x = a_1$, isto é, $\varphi(a_1) \neq 0$. Derivando, temos:

$$f'(x) = k_1 (x - a_1)^{k_1 - 1} \varphi(x) + (x - a_1)^{k_1} \varphi'(x) =$$

$$= (x - a_1)^{k_1 - 1} [k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x)].$$

Ponhamos:

$$\psi(x) = k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x).$$

Então,

$$f'(x) = (x - a_1)^{k_1 - 1} \psi(x),$$

em que

$$\psi(a_1) = k_1\varphi(a_1) + (a_1 - a_1)\varphi'(a_1) = k_1\varphi(a_1) \neq 0,$$

isto é, que, $x = a_1$ é uma raíz de ordem $k_1 - 1$ do polinómio $f'(x)$. Vê-se imediatamente, segundo a demonstração, que se $k_1 = 1$, a_1 não é uma raíz para a derivada $f'(x)$.

Resulta deste teorema que a_1 é uma raíz de ordem $k_1 - 2$ para a derivada $f''(x)$, uma raíz de ordem $k_1 - 3$ para a derivada $f'''(x)$, ..., etc., por fim, uma raíz de ordem 1 (uma raíz simples) para a derivada $f(k_1{}^1)(x)$; a_1 não é uma raíz para a derivada $fk_1(x)$, por outras palavras,

$$f(a_1) = 0,\ f'(a_1) = 0,\ f''(a_1) = 0,\ \ldots,\ f^{(k_1-1)}(a_1) = 0.$$

mas

$$f^{(k)}(a_1) \neq 0.$$

§ 8. Decomposição em factores dum polínómio no caso das raízes complexas

As raízes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, da fórmula (1) do § 7, Cap. VII, podem ser ou reais, ou complexas. Em casos semelhantes, pode-se enunciar o teorema seguinte.

Teorema — *Se* a + bi *é uma raíz complexa do polinómio* f (x) *de coeficientes reais, este polinómio tem igualmente por raíz, o número conjugado* a − bi.

Demonstração — Se substituirmos na variável x do polinómio $f(x)$ o número $a + bi$, encontramos, depois de termos efectuado as operações correspondentes e agrupado separadamente os coeficientes de i, e os que não contêm i, que

$$f(a + bi) = M + Ni,$$

em que M e N são expressões que não contêm i.

Sendo $a + bi$ uma raíz do polinómio, temos

$$f(a + bi) = M + Ni = 0,$$

donde

$$M = 0, \quad N = 0.$$

Substituamos na variável x do polinómio o número $a - bi$. Encontramos, então, depois de termos efectuado as operações correspondentes (em virtude da nota 3 feita no fim do § 2 do presente capítulo), o número conjugado de $M + Ni$, por outras palavras,

$$f(a - bi) = M - Ni.$$

Mas como $M = 0$ e $N = 0$, verificamos que $f(a - bi) = 0$, o que exprime bem que $a - bi$ é uma raíz do polinómio.

Por conseguinte, as raízes complexas entram na decomposição do polinómio.

$$f(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$$

por pares conjugados.

Multiplicando entre si os factores correspondentes ao par de raízes complexas conjugadas, obtemos um trinómio do segundo grau de coeficientes reais:

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = [(x - a) - bi][(x - a) + bi] =$$

$$= (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

em que $p = -2a$ e $q = a^2 + b^2$ são números reais.

Se o número $a + bi$ é uma raíz múltipla de ordem k, o número conjugado $a - bi$ é também uma raíz múltipla de ordem k, de modo que na decomposição dum polinómio em factores entram tantos factores lineares $x - (a + bi)$ como factores lineares $x - (a - bi)$.

Por conseguinte, *todo o polinómio de coeficientes reais pode ser decomposto em factores de coeficientes reais do primeiro e do segundo grau de multiplicidade correspondente*, isto é,

$$f(x) = A_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \ldots$$

$$\ldots (x - a_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \ldots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s},$$

onde

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2l_1 + \ldots + 2l_s = n.$$

§ 9. Interpolação. Fórmula de interpolação de Lagrange

Suponhamos que ao estudar um certo fenómeno, se tinha demonstrado a existência de uma dependência funcional entre grandezas x e y exprimindo o aspecto quantitativo deste fenómeno; a função $y = \varphi(x)$ não é conhecida, mas estabeleceu-se, ao proceder a uma série de experiências que a função $y = \varphi(x)$ toma, respectivamente, os valores $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ quando se dá à variável independente os valores $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ pertencentes ao segmento $[a, b]$.

O problema que se põe é de achar uma função o mais simples possível (um polinómio, por exemplo), que seja a expressão exacta ou aproximada da função desconhecida $y = \varphi(x)$ sobre o segmento $[a, b]$. Duma maneira mais generalizada, o problema pode ser posto como

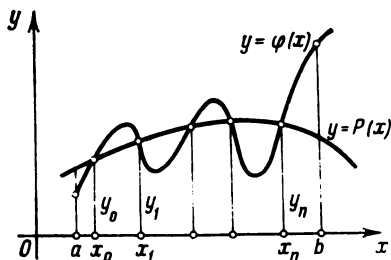
se segue: o valor da função $y = \varphi(x)$ é dado em $n+1$ pontos diferentes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ do segmento $[a, b]$:

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \varphi(x_1), \ldots, \quad y_n = \varphi(x_n);$$

pede-se para achar um *polinómio* $P(x)$ de grau $\leqslant n$ que exprima, duma maneira aproximada, a função $\varphi(x)$.

É muito natural escolher o polinómio de maneira que tome nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, os valores $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ da função $\varphi(x)$ (fig. 164). Neste caso, o problema que pusemos e que se chama «problema de *interpolação* da função» pode ser formulado da maneira seguinte: encontrar para uma função dada $\varphi(x)$ um polinómio $P(x)$ de gau $\leqslant n$ que tome nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ os valores

Fig. 164

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \varphi(x_1), \ldots, \quad y_n = \varphi(x_n).$$

Para este fim, escolhamos um polinómio de grau n da forma

$$\begin{aligned} P(x) = C_0(x - x_1)\cdot(x - x_2)\ldots(x - x_n) + \\ + C_1(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n) + \\ + C_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n) + \ldots \\ \ldots + C_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{1}$$

e determinemos os coeficientes $C_0, C_1, \ldots, C_n$ de maneira que sejam verificadas as condições

$$P(x_0) = y_0, \quad P(x_1) = y_1, \ldots, \quad P(x_n) = y_n. \tag{2}$$

Façamos na fórmula (1), $x = x_0$; então, em virtude das igualdades (2), temos:

$$y_0 = C_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n),$$

donde

$$C_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}$$

Façamos em seguida $x = x_1$; temos:

$$y_1 = C_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n),$$

donde

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)}.$$

Procedendo desta maneira, obtemos sucessivamente

$$C_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_n)},$$

. . . .

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})}.$$

Substituindo os valores assim encontrados dos coeficientes na fórmula (1), temos:

$$P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)} y_0 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)} y_1 + \dots$$

$$\dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})} y_n. \qquad (3)$$

Esta fórmula é chamada *fórmula de interpolação de Lagrange.*

Indiquemos, sem dar a demonstração, que se $\varphi(x)$ tem uma derivada de ordem $(n + 1)$ sobre o segmento $[a, b]$, o erro cometido substituindo a função $\varphi(x)$ pelo polinómio $P(x)$, isto é, a quantidade $R(x) = \varphi(x) - P(x)$ verifica a desigualdade

$$|R(x)| < |(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)| \times$$

$$\times \frac{1}{(n+1)!} \max |\varphi^{(n+1)}(x)|.$$

Nota — Resulta do teorema 4, § 6, Capítulo VII, que o polinómio obtido $P(x)$ é o único polinómio que satisfaz às condições do problema posto.

Exemplo — Os resultados duma experiência forneceram-nos os valores da função $y = \varphi(x)$: $y_0 = 3$, $y_1 = -5$, $y_2 = 4$, correspondentes aos valores 1, 2, -4, da variável independente x.

Exprimir a função $y = \varphi(x)$, duma maneira aproximada, por um polinómio do segundo grau.

Resolução — Em virtude da fórmula (3), temos (para $n = 2$):

$$P(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)} 3 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)}(-5) + \frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)} 4$$

ou

$$P(x) = -\frac{39}{30} x^2 - \frac{123}{30} x + \frac{252}{30}.$$

Notemos que existe igualmente outras fórmulas de interpolação. Uma, entre elas, a fórmula de Newton, é considerada no Anexo II.

§ 10. Melhor aproximação duma função pelos polinómios. Teoria de Tchébychev

O problema considerado no parágrafo precedente conduz-nos, muito naturalmente, a pôr a nós próprios a questão seguinte: seja uma função contínua $\varphi(x)$ definida sobre o segmento $[a, b]$. Pode-se aproximar esta função com o auxílio dum polinómio $P(x)$ *com um grau de precisão arbitràriamente dado antecipadamente*? Por outras palavras, pode-se obter um polinómio $P(x)$ tal que a diferença, em valor absoluto, entre $\varphi(x)$ e $P(x)$ seja inferior em cada ponto do segmento $[a, b]$ a um número arbitrário dado $\varepsilon > 0$?

O teorema seguinte, que enunciamos sem dar a demonstração, responde afirmativamente (*) a esta questão.

Teorema de Weierstrass — *Se a função* $\varphi(x)$ *é contínua sobre o segmento* $[a, b]$, *então, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe um polinómio* $P(x)$ *tal que em cada ponto deste segmento a desigualdade*

$$|\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon$$

é satisfeita.

O célebre matemático soviético S. Bernstein indicou um método racional para construir polinómios sensìvelmente iguais à função contínua dada sobre o segmento considerado.

Suponhamos que a função $\varphi(x)$ seja contínua sobre o segmento $[0, 1]$. Formemos a expressão

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \varphi\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

(*) Notemos que o polinómio de interpolação de Lagrange [ver (3), § 9], não permite responder à questão posta. Nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ os valores deste polinómio são efectivamente iguais aos valores correspondentes da função, mas em qualquer outro ponto do segmento $[a, b]$, estes valores podem diferir notàvelmente.

Nesta expressão C_n^m são os coeficientes do binómio de Newton e $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ o valor da função dada no ponto $x = \frac{m}{n}$. A expressão $B_n(x)$ é um polinómio de grau n; chama-se *polinómio de Bernstein.*

Para todo o número arbitràriamente pequeno $\varepsilon > 0$, pode-se sempre obter um polinómio de Bernstein de grau tal, que seja verificada a desigualdade

$$|B_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

em todos os pontos do segmento [0, 1].

Notemos que a escolha do segmento [0, 1] não restringe a generalidade, porque se pode sempre reduzir um segmento qualquer $[a, b]$ ao segmento [0, 1] com o auxílio da modificação da variável $x = a + t(b - a)$. Esta transformação conserva o grau do polinómio.

É ao célebre matemático russo P. Tchébychev (1821 — 1894), um dos representantes mais eminentes do pensamento matemático, que pertence o mérito de ter elaborado a teoria da melhor aproximação das funções com o auxílio de polinómios. Pertencem-lhe, neste domínio das matemáticas, resultados fundamentais que abriram o caminho aos trabalhos ulteriores dos seus numerosos continuadores.

O ponto de partida desta teoria de Tchébychev foi a sua memória sobre a teoria dos mecanismos articulados. É justamente o estudo destes mecanismos que o conduziu a procurar no meio de todos os polinómios dum dado grau n, cujo coeficiente de x^n é igual a um, aquele que difere a menos de zero, sobre o segmento dado. Este grande matemático conseguiu resolver este problema, e os polinómios obtidos foram chamados, por consequência, *polinómios de Tchébychev.* Estes polinómios têm numerosas propriedades notáveis e constituem na hora actual um poderoso meio de investigação nos numerosos problemas matemáticos e técnicos.

Exercícios

1. Calcular $(3+5i)(4-i)$. **Resp.** $17+17i$.
2. Calcular $(6+11i)(7+3i)$. **Resp.** $9+95i$.
3. Calcular $\frac{3-i}{4+5i}$. **Resp.** $\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$.
4. Calcular $(4-7i)^3$. **Resp.** $-524+7i$.
5. Calcular $\sqrt{i}$. **Resp.** $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
6. Calcular $\sqrt{-5-12i}$. **Resp.** $\pm(2-3i)$.

Por sob a forma trigonométrica as expressões:

a) $1 + i$. Resp. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$.

b) $1 - i$. Resp. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$.

Achar $\sqrt[3]{i}$. Resp. $\frac{i+\sqrt{3}}{2}$; $-i$; $\frac{i-\sqrt{3}}{2}$.

9. Exprimir as expressões seguintes, em função das potências de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$: $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{sen} 4x$, $\cos 4x$, $\operatorname{sen} 5x$, $\cos 5x$.

10. Exprimir em função dos senos e cosenos dos arcos múltiplos, as expressões: $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, $\cos^5 x$. $\cos^6 x$; $\operatorname{sen}^2 x$, $\operatorname{sen}^3 x$, $\operatorname{sen}^4 x$, $\operatorname{sen}^5 x$.

11. Dividir $f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 1$ por $x + 4$. Resp. $f(x) = (x + 4) \times \times (x^2 - 8x + 40) - 161$, isto é, quociente: $x^2 - 8x + 40$; resto: $f(-4) = f(-4) = -161$.

12. Dividir $f(x) = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$ por $x + 3$. Resp. $f(x) = (x + 3)(x^3 + 9x^2 + 27x + 27)$.

13. Dividir $f(x) = x^7 - 1$ por $x - 1$. Resp. $f(x) = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

Decompor em factores os polinómios seguintes:

14. $f(x) = x^4 - 1$. Resp. $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$.

15. $f(x) = x^2 - x - 2$. Resp. $f(x) = (x - 2)(x + 1)$.

16. $f(x) = x^3 + 1$. Resp. $f(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

17. Os resultados das experiências deram os valores seguintes da função y de x:

$$y_1 = 4 \text{ para } x_1 = 0,$$
$$y_2 = 6 \text{ para } x_2 = 1,$$
$$y_3 = 10 \text{ para } x_3 = 2.$$

Exprimir esta função duma maneira aproximada, com o auxílio dum polinómio do segundo grau. Resp. $x^2 + x + 4$.

18. Achar um polinómio do quarto grau, que tome, respectivamente, os valores 2, 1, − 1, 5, 0 para os valores de 1, 2, 3, 4, 5, de x.

Resp. $-\frac{7}{6}x^4 + \frac{79}{6}x^3 - \frac{151}{3}x^2 + \frac{226}{3}x - 35$.

19. Achar o polinómio de grau o mais pequeno possível, que tome, respectivamente, os valores 3, 7, 9, 19 para $x = 2$, 4, 5, 10. Resp. $2x - 1$.

20. Achar os polinómios de Bernstein do primeiro, segundo, terceiro e quarto grau, para a função $y = \operatorname{sen} \pi x$ sobre o segmento [0, 1]. Resp. $B_1(x) = 0$;

$$B_2(x) = 2x(1-x);\ B_3(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x);\ B_4(x) = 2x(1-x) \times$$

$$\times [(2\sqrt{2}-3)x^2 - (2\sqrt{2}-3)x + \sqrt{2}].$$

Capítulo VIII

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

§ 1. Definição das funções de várias variáveis

Ao estudarmos as funções de uma só variável, notamos que a análise de numerosos fenómenos necessita do emprego das funções de duas ou mais variáveis independentes. Citemos alguns exemplos.

Exemplo — 1. A área de um rectângulo de lados x e y é dada pela fórmula bem conhecida

$$S = xy.$$

A cada par de valores de x e y corresponde um valor bem determinado da superfície S. S é, pois, uma função de duas variáveis.

Exemplo — 2. O volume V dum paralelepípedo rectângulo, cujo comprimento das arestas é respectivamente x, y, z, é dado pela fórmula

$$V = xyz.$$

Aqui V é uma função de três variáveis x, y, z.

Exemplo — 3. O alcance R da trajectória dum projéctil lançado à velocidade inicial V_0 sob um ângulo φ com o horizonte, é dado pela fórmula

$$R = \frac{V_0^2 \cdot \operatorname{sen} 2\varphi}{g}$$

(se se desprezar a resistência do ar). g designa aqui, a aceleração da gravidade.

A cada par de valores V_0 e φ corresponde um valor bem determinado de R, por outras palavras, R é uma função de duas variáveis V_0 e φ

Exemplo — 4.

$$u = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{\sqrt{1 + x^2}},$$

u é, aqui, uma função de quatro variáveis x, y, z, t.

Definição — 1. Se a cada par (x, y) de valores de duas variáveis x e y, independentes, tomados num certo domínio de definição D, corresponde um valor bem determinado da variável z, diz-se que z é *uma função de duas variáveis independentes x e y* definida no domínio D.

Designa-se uma função de duas variáveis pela notação

$$z = f(x, y) \quad \text{ou} \quad z = F(x, y), \quad \text{etc.}$$

Uma função de duas variáveis pode ser expressa, quer com o auxílio de quadros, quer analìticamente, com o auxílio duma fórmula como o fizemos nos quatro exemplos acima citados. A fórmula permite estabelecer o quadro dos valores que toma a função para cada par de valores das variáveis independentes. Por exemplo, pode-se formar o quadro de dupla entrada seguinte, no caso do primeiro exemplo:

$$S = xy$$

y \ x	0	1	1,5	2	3
1	0	1	1,5	2	3
2	0	2	3	4	6
3	0	3	4,5	6	9
4	0	4	6	8	12

Neste quadro, acha-se o valor da função S pela intersecção da linha e da coluna correspondente aos valores escolhidos de x e de y.

Se a dependência funcional $z = f(x, y)$, foi estabelecida após medidas efectuadas sobre a variável z no decurso do estudo experimental dum fenómeno qualquer, obtém-se, então, um quadro de dupla entrada definindo z em função das duas variáveis x e y. Neste caso, a função é dada ùnicamente por um quadro.

A função de duas variáveis, do mesmo modo que a função duma só variável, pode não ser definida para todos os valores arbitrários das variáveis independentes x e y.

Definição — 2. Chama-se *domínio de definição* ou *domínio de existência* da função

$$z = f(x, y)$$

ao conjunto dos pares (x, y) dos valores de x e de y para os quais esta função é definida.

O domínio de existência duma função de duas variáveis pode ser geomètricamente interpretado como se segue: se se representa cada par de valores x e y por um ponto $M(x, y)$ do plano Oxy, o domínio de definição da função será representado por um conjunto de pontos deste plano. Chamaremos a este conjunto de pontos, domínio de definição da função. Em particular, este domínio pode ocupar o plano Oxy completamente. No seguimento, os domínios de definição, que tivermos de considerar, serão constituídos por partes do plano *delimitadas por certas curvas*. A curva que delimita o domínio de definição chama-se *fronteira* deste domínio. Os pontos do domínio que

não pertencem à fronteira são chamados pontos *interiores* do domínio. Todo o domínio constituído de pontos interiores chama-se *domínio aberto*. Um domínio completado pela sua fronteira diz-se *domínio fechado*. O domínio diz-se *limitado* se existe uma constante C tal que a distância M de qualquer ponto deste domínio à origem das coordenadas O é inferior a C, por outras palavras, $|OM| < C$.

Exemplo — 5. Determinar o domínio natural de definição da função

$$z = 2x - y.$$

A expressão analítica $2x - y$ é definida para todos os valores arbitrários de x e de y. Por conseguinte, o domínio natural de definição desta função coincide com o plano Oxy inteiro.

Exemplo — 6.
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Para que z seja real é necessário que o radial seja um número não negativo ou, por outras palavras, que x e y verifiquem as desigualdades

$$1 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \text{ ou } x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

O conjunto dos pontos $M(x, y)$, cujas coordenadas verificam esta desigualdade, é a parte do plano delimitado pelo círculo de raio 1 e de centro, na origem das coordenadas (mais exactamente, o interior deste círculo e sua circunferência).

Exemplo — 7.
$$z = \text{Log}\,(x + y).$$

Sendo os logaritmos apenas definidos para os números positivos, deve-se ter, necessàriamente, a desigualdade

$$x + y > 0 \text{ ou } y > -x.$$

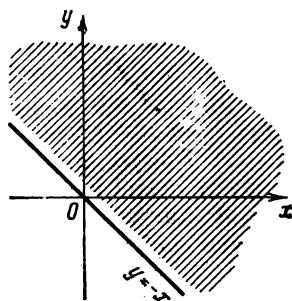



Fig. 165

O domínio natural de definição desta função é, por conseguinte, o semi-plano colocado por cima da recta $y = -x$ (os pontos da recta não pertencem ao domínio) (fig. 165).

Exemplo — 8. A superfície S dum triângulo, é uma função da base x e da altura y:

$$S = \frac{xy}{2}.$$

O domínio de definição desta função é, evidentemente, o domínio $x > 0$, $y > 0$ (é claro que a base e a altura não podem ser expressas a não ser por números estritamente posiivos).

Notemos que o domínio de definição da função considerada não se identifica com o domínio natural de definição da expressão analítica que a define, o domínio natural de definição da expressão $\frac{xy}{2}$ ocupando, evidentemente, o plano Oxy completamente.

Pode-se estender, fàcilmente, a definição de função de duas variáveis reais independentes ao caso de três e mais variáveis independentes.

Definição — 3. Se a todo o sistema ordenado de valores das variáveis x, y, x, ..., u, t, corresponde um valor bem determinado da variável w, diz-se que w é uma *função das variáveis independentes* $x, y, z, \ldots, u, t$, e nota-se $w = F(x, y, z, \ldots u, t)$ ou $w = f(x, y, z, \ldots, u, t)$, etc.

Define-se o domínio de definição duma função de três, quatro ou dum número qualquer de variáveis do mesmo modo que no caso de uma função de duas variáveis.

Assim, o domínio de definição duma função de três variáveis é um conjunto de sistemas ordenados dos valores (x, y, z). Notemos imediatamente que todo o sistema ordenado de três números define um ponto $M(x, y, z)$ do espaço $Oxyz$. Resulta que o domínio de definição duma função de três variáveis é um certo conjunto de pontos do espaço.

Pode-se definir, do mesmo modo, o domínio de definição duma função de quatro variáveis independentes $u = f(x, y, z, t)$, como um certo conjunto de sistemas ordenados dos quatro valores (x, y, z, t). Todavia, não é possível neste caso, bem como nos casos dum maior número de variáveis independentes, dar uma interpretação geométrica simples ao domínio de definição.

A função considerada no exemplo 2, é uma função de três variáveis indepedentes definida para todos os valores de x, y, z.

A função considerada no exemplo 4, é uma função de quatro variáveis independentes.

Exemplo — 9.

$$w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2},$$

w é, aqui, uma função de quatro variáveis independentes x, y, z, u; ela é definida para os valorès das variáveis independentes que verificam a desigualdade

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2 \geqslant 0.$$

§ 2. Representação geométrica duma função de duas variáveis

Seja

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

uma função definida num domínio G do plano Oxy (este domínio pode ocupar, em particular, o plano completamente) e seja $Oxyz$ um sistema de coordenadas cartesianas no espaço (fig. 166). Em cada ponto (x, y) do domínio G elevemos uma perpendicular ao plano Oxy sobre o qual traçamos um segmento igual ao valor de $f(x, y)$.

Obtemos, então, um ponto P do espaço, cujas coordenadas são

$$x, \ y, \ z = f(x, \ y).$$

O lugar geométrico de todos os pontos P, cujas coordenadas verificam a equação (1), chama-se o gráfico da função de duas variáveis. Sabe-se, do curso de geometria analítica, que a equação (1) define uma superfície no espaço. O gráfico duma função de duas

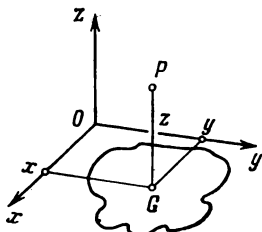
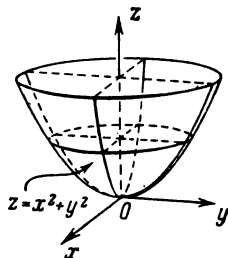



Fig. 166 Fig. 167

variáveis é, pois, uma superfície cuja projecção no plano Oxy é o domínio de definição desta função. Cada perpendicular ao plano Oxy corta a superfície $z = f(x, y)$ no máximo dum só ponto.

Exemplo — Sabe-se, do curso de geometria analítica, que o gráfico da função $z = x^2 + y^2$ é um parabolóide de revolução (fig. 167).

Nota — Não é possível representar, geomètricamente, no espaço, o gráfico duma função de três ou dum número mais elevado de variáveis independentes.

§ 3. Crescimento parcial e crescimento total da função

Consideremos a curva PS definida pela intersecção da superfície

$$z = f(x, \ y)$$

com o plano $y =$ const. paralela ao plano Oxz (fig. 168).

Sendo y constante em todo o ponto deste plano, z variará ao longo da curva PS sòmente em função de x. Demos à variável independente x um crescimento Δx; o crescimento correspondente de z é, então, chamado *crescimento parcial de z em relação a x*; é notado por $\Delta_x z$ (o segmento SS' da figura 168) e definido pela relação:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, \ y) - f(x, \ y). \tag{1}$$

Do mesmo modo, se x é constante e se dá a y um crescimento Δy, o crescimento correspondente de z chama-se, então, *crescimento parcial de z em relação a y* e anota-se $\Delta_y z$ (o segmento TT' da figura 168):

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \qquad (2)$$

A função recebe, então, o crescimento $\Delta_y z$ «ao longo da curva», definida pela intersecção da superfície $z = f(x, y)$ e do plano $x =$ const., paralelo ao plano Oyz.

Se agora se der, simultâneamente, um crescimento Δx à variável independente x e um crescimento Δy à variável independente y, o

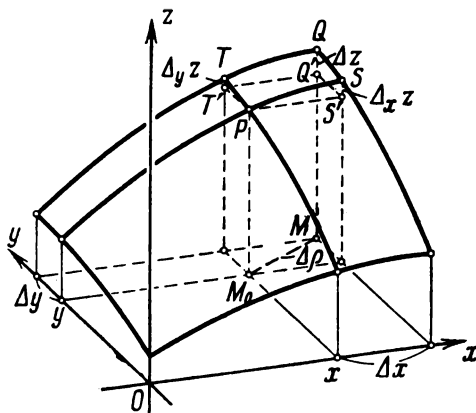



Fig. 168

crescimento correspondente Δz de z que daí resultará chama-se *crescimento total* da função z; o crescimento total é definido pela fórmula:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \qquad (3)$$

O crescimento Δz está representado pelo segmento QQ' da figura 168.

Notemos que, em geral, o crescimento total não é igual à soma dos crescimentos parciais:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Exemplo — $z = xy$.

$$\Delta_x z = (x + \Delta x) y - xy = y\Delta x,$$

$$\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y,$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

Para $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}3$, **tem-se** $\Delta_x z = 0{,}4$, $\Delta_y z = 0{,}3$, $\Delta z = 0{,}76$.

Define-se, duma maneira análoga, o crescimento total e os crescimentos parciais das funções dum número qualquer de variáveis. Ter-se-á, por exemplo, para uma função de três variáveis independentes $u = f(x, y, t)$:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, t) - f(x, y, t),$$

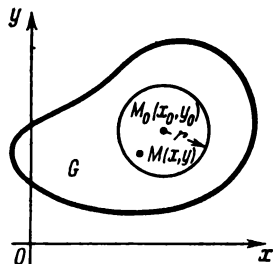
$$\Delta_t u = f(x, y, t + \Delta t) - f(x, y, t),$$

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) - f(x, y, t).$$

§ 4. Continuidade das funções de várias variáveis

Introduzamos, primeiramente, a noção importante de vizinhança dum ponto dado. Chama-se *vizinhança* do ponto $M_0(x_0, y_0)$ de raio r, ao conjunto de todos os pontos (x, y) que satisfaçam à desigualdade $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$, isto é, o conjunto de todos os pontos situados no interior do círculo de raio r e de centro no ponto $M_0(x_0, y_0)$.

Fig. 169

Por consequência, quando dissermos que a função $f(x, y)$ tem uma certa propriedade «na vizinhança do ponto $M_0(x_0, y_0)$», isso significará que existe um círculo de centro no ponto $M_0(x_0, y_0)$ em todos os pontos do qual a propriedade dada da função é verificada.

Antes de passarmos ao estudo da continuidade das funções de várias variáveis, detenhamo-nos na noção do limite das funções de várias variáveis (*). Seja dada

$$z = f(x, y)$$

uma função definida num certo domínio G do plano Oxy.

Consideremos um certo ponto $M_0(x_0, y_0)$ situado no interior ou sobre a fronteira do domínio G (fig. 169).

Definição — 1. Diz-se que o número A é o *limite* da função $f(x, y)$ quando o ponto $M(x, y)$ tende para o ponto $M_0(x_0, y_0)$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $r > 0$ tal que para todos os pontos $M(x, y)$ que verificam a desigualdade $MM_0 < r$, a desigualdade

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

é satisfeita.

(*) De facto, apenas estudaremos as funções de duas variáveis, porque o estudo das funções de três ou dum número mais elevado de variáveis não traz nenhum elemento novo, mas provoca dificuldades complementares de ordem técnica.

Se o número A é o limite da função $f(x, y)$, quando $M(x, y) \to \to M_0(x_0, y_0)$, nota-se:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Definição — 2. Seja $M_0(x_0, y_0)$ um ponto pertencendo ao domínio de definição da função $f(x, y)$. Diz-se que a função $z = f(x, y)$ *é contínua no ponto* $M_0(x_0, y_0)$ se a igualdade

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \tag{1}$$

é verificada, quando o ponto $M(x, y)$, tende arbitràriamente, (permanecendo no interior do domínio de definição) para o ponto $M_0(x_0, y_0)$.

Façamos, $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. A igualdade (1) pode, então, escrever-se:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \tag{1'}$$

ou

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0. \tag{1''}$$

Façamos, $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (ver fig. 168). Quando $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$, $\Delta\rho \to 0$ e, inversamente, se $\Delta\rho \to 0$, então, $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$.

A expressão entre parêntesis na igualdade (1″), não é mais do que o crescimento total Δz da função z.

Por conseguinte, a igualdade (1″) pode ser posta sob a forma

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta z = 0. \tag{1'''}$$

Uma função contínua em cada ponto dum certo domínio diz-se, *contínua nesse domínio.*

Se a condição (1) não é preenchida num certo ponto $N(x_0, y_0)$, este ponto chama-se *ponto de descontinuidade* da função $z = f(x, y)$. Citemos alguns exemplos em que a condição (1′) não tem lugar:

1) $z = f(x, y)$ é definida em cada ponto duma certa vizinhança do ponto $N(x_0, y_0)$, mas não é definida nesse ponto:

2) A função $z = f(x, y)$ é definida em cada ponto duma vizinhança do ponto $N(x_0, y_0)$ mas o limite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ não existe;

3) A função é definida em cada ponto da vizinhança de $N(x_0, y_0)$, o limite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ existe, mas

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0).$$

Exemplo — 1. A função

$$z = x^2 + y^2$$

é contínua para todos os valores de x e y, isto é, em cada ponto do plano Oxy.

Com efeito, quaisquer que sejam os números x, y, Δx e Δy, tem-se:

$$\Delta z = [(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2] - [x^2 + y^2] = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

Por conseguinte,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Citemos, agora, um exemplo de função descontínua.

Exemplo — 2. A função

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

é sempre definida, excepto no ponto $x = 0$, $y = 0$ (fig. 170, 171).

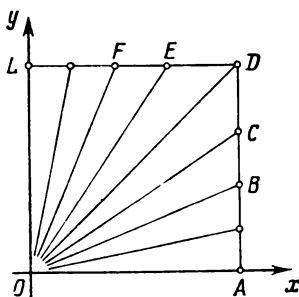



Fig. 170

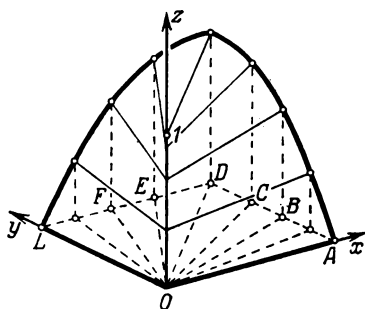



Fig. 171

Consideremos os valores que toma z nos pontos situados sobre a recta $y = kx$ (k = const). É evidente que para todos os pontos desta recta

$$z = \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2} = \text{const},$$

por outras palavras, sobre cada recta que passa pela origem, a função z, tem um valor constante, mas que depende do coeficiente angular k desta recta.

É esta a razão porque o valor limite da função z depende do caminho percorrido pelo ponto (x, y) quando ele tende para a origem das coordenadas. Esta função tem, por conseguinte, uma descontinuidade nesse ponto.

Esta descontinuidade é tal, que não se pode fazê-la desaparecer dando à função z um valor apropriado na origem. Por outro lado, vê-se, fàcilmente, que em qualquer ponto diferente da origem a função é contínua.

§ 5. Derivadas parciais duma função de várias variáveis

Definição — Chama-se *derivada parcial em relação a* x da função $z = f(x, y)$ ao limite do quociente de crescimento parcial $\Delta_x z$ em relação a x e do crescimento Δx da variável x, quando Δx tende para zero.

Designa-se a derivada parcial em relação a x da função $z = f(x, y)$ por uma das notações seguintes

$$z'_x; \quad f'_x(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Logo, por definição,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Define-se, do mesmo modo, a *derivada parcial da função* $z = f(x, y)$, *em relação a* y como o limite do quociente do crescimento parcial $\Delta_y z$ em relação a y e do crescimento Δy quando Δy tende para zero. Designa-se a derivada parcial em relação a y por uma das notações seguintes

$$z'_y; \quad f'_y(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial y}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Assim,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Notando que $\Delta_x z$ é calculado deixando y sem alteração e $\Delta_y z$ deixando x sem alteração, pode-se, então, definir a derivada parcial da maneira seguinte: chama-se *derivada parcial* da função $z = f(x, y)$, *em relação a* x, à derivada em relação a x calculada supondo y constante.

Do mesmo modo, chama-se *derivada parcial* da função $z = f(x, y)$, *em relação a* y, à derivada em relação a y calculada supondo x constante.

Resulta desta definição, que as regras de cálculo das derivadas parciais são as mesmas que as empregadas para calcular a derivada das funções de uma variável; é preciso, sòmente, ter-se em atenção em relação a que variável se efectua a derivação.

Exemplo — 1. Achar as derivadas parciais

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ da função } z = x^2 \operatorname{sen} y.$$

Resolução.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \operatorname{sen} y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

Exemplo — 2. $z = x^y$.

Neste caso,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \operatorname{Log} x.$$

Define-se, duma maneira análoga, as derivadas parciais duma função dum número qualquer de variáveis. Por exemplo, se tomamos uma função u de quatro variáveis x, y, z, t:

$$u = f(x, y, z, t),$$

então,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y}, \text{ etc.}$$

Exemplo — 3. $u = x^2 + y^2 + xtz^3$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + tz^3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xtz^2; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = xz^3$$

§ 6. Interpretação geométrica das derivadas parciais duma função de duas variáveis

Seja

$$z = f(x, y)$$

a equação da superfície representada na figura 172.

Tracemos o plano $x = \text{const}$. A intersecção deste plano e da superfície, define uma curva PT. Consideremos para um valor dado de x um ponto $M(x, y)$ do plano Oxy. Ao ponto M corresponde um ponto $P(x, y, z)$ sobre a superfície $z = f(x, y)$. Deixando x sem alteração, demos a y um crescimento $\Delta y = MN = PT'$. A função z recebe, então, um crescimento $\Delta_y z = TT'$ [ao ponto $N(x, y + \Delta y)$ corresponde um ponto $T(x, y + \Delta y, z + \Delta_y z)$) da superfície $z = f(x, y)$].

O quociente $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ é igual à tangente do ângulo formado pela *secante* PT com o eixo dos y positivos:

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \operatorname{tg} \widehat{TPT'}.$$

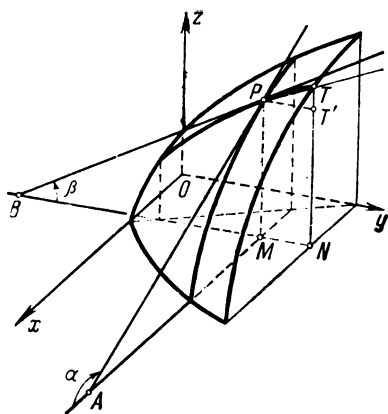
Por conseguinte, o limite

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

é igual à tangente do ângulo β formado pela tangente PB (no sentido geométrico) à curva PT no ponto P com o eixo dos y positivos:

Fig. 172

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta.$$

O valor da derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial y}$ é, pois, igual à tangente do ângulo formado pela tangente (no sentido geométrico) à curva definida pela intersecção da superfície $z = f(x, y)$ e do plano $x = \text{const.}$, por um lado, e a linha de intersecção dos planos xOy e $x = \text{const.}$, por outro.

Do mesmo modo, o valor da derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$ é igual à tangente do ângulo α formado pela tangente à curva, definida pela intersecção da superfície $z = f(x, y)$ e do plano $y = \text{const.}$ e a linha dos planos xOy e $y = \text{const.}$

§ 7. Crescimento total e diferencial total

Por definição, o crescimento total da função $z = f(x, y)$ é igual a (ver § 3, Cap. VIII):

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{1}$$

Suponhamos que as derivadas parciais da função $f(x, y)$ no ponto considerado existem e são contínuas.

Exprimamos Δz com o auxílio das derivadas parciais. Para isso juntemos e diminuamos $f(x, y + \Delta y)$ no segundo membro da igualdade (1):

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + \\ + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \tag{2}$$

A expressão

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

que figura no segundo parêntesis, pode ser considerada como a diferença de dois valores, duma função duma só variável y (sendo x constante). Apliquemos o teorema de Lagrange a esta diferença; temos:

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}, \tag{3}$$

em que $\bar{y}$ está comprendido entre y e $y + \Delta y$.

Do mesmo modo, pode-se considerar a expressão que figura no primeiro parêntesis da igualdade (2) como a diferença de dois valores duma função duma só variável independente x (sendo a segunda variável constante e igual a $y + \Delta y$). Apliquemos a esta diferença o teorema de Lagrange; temos:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y+\Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x},\ y+\Delta y)}{\partial x}, \tag{4}$$

em que $\bar{x}$ está compreendido entre x e $x + \Delta x$.

Substituindo as expressões (3) e (4) na igualdade (2), tem-se:

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x},\ y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x,\ \bar{y})}{\partial y}. \tag{5}$$

As derivadas parciais sendo contínuas por hipótese, tem-se

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x},\ y+\Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}, \\ \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x,\ \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(estando $\bar{x}$ e $\bar{y}$, respectivamente, compreendidos entre x e $x + \Delta x$, y e $y + \Delta y$, tendem, respectivamente, para x e y para $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$).

Pode-se, então, por a igualdade (6) sobre a forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x},\ y+\Delta y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x} + \gamma_1, \\ \frac{\partial f(x,\ \bar{y})}{\partial y} &= \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} + \gamma_2, \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

em que γ_1 e γ_2 tendem para zero quando Δx e Δy tendem para zero (isto é, quando $\Delta\rho = \Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$).

Em virtude da igualdade (6'), a relação (5) torna-se

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y. \tag{5'}$$

A expressão $\gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$ é um infinitamente pequeno de ordem superior em relação a $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Com efeito, o quociente

$\frac{\gamma_1 \Delta x}{\Delta \rho} \to 0$, quando $\Delta\rho \to 0$, visto que γ_1 é um infinitamente pequeno e que $\frac{\Delta x}{\Delta \rho}$ é limitado $\left(\left|\frac{\Delta x}{\Delta \rho}\right| \leqslant 1\right)$. Verifica-se, do mesmo modo, que $\frac{\gamma_2 \Delta y}{\Delta \rho} \to 0$.

A soma dos dois primeiros termos é uma expressão linear em Δx e Δy. Ela representa, quando $f'_x(x, y) \neq 0$ e $f'_y(x, y) \neq 0$, a parte *principal* de crescimento e difere de Δz por um infinitamente pequeno de ordem superior em relação a $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Definição — Diz-se que a função $z = f(x, y)$ é *diferenciável no ponto* (x, y) se o crescimento total (Δz) nesse ponto puder ser posto sob a forma duma soma composta de dois termos: sendo o primeiro uma expressão linear em Δx e Δy e o segundo um infinitamente pequeno de ordem superior em relação a $\Delta\rho$. A parte linear do crescimento é, então, chamada *diferencial total* e anotada dz ou df.

Resulta da igualdade (5′) que se as derivadas parciais da função $f(x, y)$ são contínuas num ponto dado, esta função é diferenciável nesse ponto; o diferencial total é, então.

$$dz = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y.$$

Pode-se pôr a igualdade (5′) sob a forma

$$\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$$

e escrever a igualdade *aproximada* seguinte:

$$\Delta z \approx dz,$$

sendo o erro cometido, um infinitamente pequeno de ordem superior em relação a $\Delta\rho$.

Chamam-se *diferenciais* das variáveis independentes x e y e designa-se, respectivamente, por dx e dy aos crescimentos Δx e Δy das variáveis x e y.

Pode-se, então, escrever o diferencial total da seguinte maneira

$$dz = \frac{\partial f}{dx}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

Por conseguinte, se a função $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais contínuas, ela é diferenciável no ponto (x, y) e o seu diferencial total é igual à soma dos produtos das derivadas parciais pelos diferenciais das variáveis independentes correspondentes.

Exemplo — 1. Calcular o diferencial total e o crescimento total da função $z = xy$ no ponto $(2;\ 3)$, se $\Delta x = 0{,}1$ e $\Delta y = 0{,}2$.

Resolução.

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\,\Delta x + x\,\Delta y + \Delta x\,\Delta y,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = y\,dx + x\,dy = y\,\Delta x + x\,\Delta y.$$

Por conseguinte,

$$\Delta z = 3\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 + 0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}72;$$

$$dz = 3\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 = 0{,}7.$$

A figura 173 ilustra este exemplo.

As definições e os raciocínios precedentes podem ser generalizados ao caso duma função dum número qualquer de variáveis independentes.

Seja $w = f(x, y, z, u, \ldots, t)$, uma função dum número qualquer de variáveis, em que todas as derivadas parciais são contínuas no ponto $(x, y, z, \ldots, t)$.

A expressão

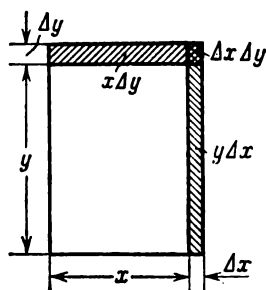
$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

constitui, então, a parte principal do crescimento total da função: denomina-se diferencial total. Demonstra-se, fàcilmente, da mesma maneira, que o caso de uma função de duas variáveis, que a diferença $\Delta w - dw$ é um infinitamente pequeno de ordem superior em relação a $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \ldots + (\Delta t)^2}$.

Fig. 173

Exemplo — 2. Achar o diferencial total da função $u = e^{x^2+y^2}\operatorname{sen}^2 z$ de três variáveis x, y, z.

Resolução — As derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2}2x\operatorname{sen}^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2}2y\operatorname{sen}^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2}\,2\operatorname{sen} z\cos z = e^{x^2+y^2}\operatorname{sen} 2z$$

são contínuas para todos os valores de x, y, z, por conseguinte,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = e^{x^2+y^2}(2x\operatorname{sen}^2 z\,dx + 2y\operatorname{sen}^2 z\,dy + \operatorname{sen} 2z\,dz).$$

§ 8. Emprego do diferencial total para cálculos aproximados

Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável no ponto (x, y). Calculemos o crescimento total desta função

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

donde

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z. \tag{1}$$

Tínhamos a fórmula aproximada:

$$\Delta z \approx dz, \tag{2}$$

onde

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y. \tag{3}$$

Substituindo na fórmula (1) Δz pela expressão explícita de dz, encontra-se a fórmula aproximada:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y, \tag{4}$$

sendo o erro cometido, um infinitamente pequeno de ordem superior em relação a Δx e Δy.

Mostremos como utilizar as fórmulas (2) e (4) para os cálculos aproximados.

Problema — Calcular o volume da matéria utilizada para a fabricação dum cilindro cujas dimensões são (fig. 174):

R — raio interior do cilindro,

H — altura do cilindro interior,

k — espessura das paredes e do fundo.

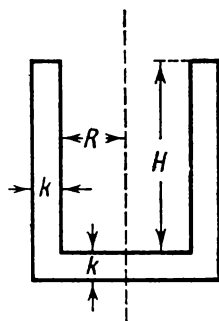



Fig. 174

Resolução — Daremos duas soluções deste problema: uma exacta e outra aproximada.

a) *Solução exacta* — O volume procurado v é igual à diferença dos volumes dos cilindros exterior e interior, sendo o raio do cilindro exterior $R + k$ e a altura $H + k$, tem-se:

$$v = \pi (R + k)^2 (H + k) - \pi R^2 H$$

ou

$$v = \pi (2RHk + R^2k + Hk^2 + 2Rk^2 + k^3). \tag{5}$$

b) *Solução aproximada* — Designemos por f o volume do cilindro interior, então, $f = \pi R^2 H$. f é uma função de duas variáveis R e H. Se se junta k a R e a H, a função f recebe um crescimento correspondente Δf; este crescimento será, precisamente, o volume procurado, isto é, $v = \Delta f$

Em virtude da relação (1), temos a igualdade aproximada

$$v \approx df$$

ou

$$v \approx \frac{\partial f}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial f}{\partial H} \Delta H.$$

Mas como

$$\frac{\partial f}{\partial R} = 2\pi RH, \quad \frac{\partial f}{\partial H} = \pi R^2, \quad \Delta R = \Delta H = k,$$

temos

$$v \approx \pi (2RHk + R^2k). \tag{6}$$

Comparando os resultados (5) e (6), vemos que eles diferem pela quantidade $\pi (Hk^2 + 2Rk^2 + k^3)$, composta ùnicamente de termos que contêm k ao quadrado e ao cubo.

Apliquemos estas fórmulas para dados concretos. Seja $R = 4$ cm, $H = 20$ cm, $k = 0{,}1$ cm.

Aplicando (5), temos o valor exacto do volume procurado:

$$v = \pi (2\cdot 4\cdot 20\cdot 0{,}1 + 4^2\cdot 0{,}1 + 20\cdot 0{,}1^2 + 2\cdot 4\cdot 0{,}1^2 + 0{,}1^3) = 17{,}881\pi.$$

Aplicando (6), temos o valor aproximado

$$v \approx \pi (2\cdot 4\cdot 20\cdot 0{,}1 + 4^2\cdot 0{,}1) = 17{,}6\pi.$$

O erro cometido, aplicando a fórmula aproximada (6), é inferior a $0{,}3\pi$, ou seja, $100\cdot\frac{0{,}3\pi}{17{,}881\pi}\%$. isto é, menos de 2 % da quantidade medida.

§ 9. Emprego do diferencial para avaliar o erro cometido durante os cálculos numéricos

Seja

$$u = f(x, y, z, \ldots, t)$$

uma função das variáveis $x, y, z, \ldots, t$. Suponhamos que a avaliação dos valores numéricos das quantidades $x, y, z, \ldots, t$, é feita com um certo erro (respectivamente, a $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots, \Delta t$, aproximadamente). O valor de u será igualmente determinado com um certo erro

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots, t + \Delta t) -$$

$$- f(x, y, z, \ldots, t),$$

devido ao erro de avaliação das variáveis independentes. Propomo-nos avalia o erro Δu, se se supõe conhecidos os erros $\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta t$.

upondo os valores absolutos dos $\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta t$, suficientemente peque os, pode-se substituir o crescimento total da função pelo diferencial total; obtém-se, então, a igualdade aproximada

$$\Delta u \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t.$$

As derivadas parciais e os erros relativos às variáveis independentes são ou positivas ou negativas. Substituamo-las pelos seus valores absolutos; encontra-se, então, a desigualdade

$$|\Delta u \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta y| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| |\Delta t|. \tag{1}$$

Se se designar por $|\Delta^* x|$, $|\Delta^* y|$, ..., $|\Delta^* u$ os *erros absolutos máximos* das variáveis correspondentes (os limites dos valores absolutos dos erros), pode-se, evidentemente, admitir que:

$$|\Delta^* u| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta^* y| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| |\Delta^* t|. \tag{2}$$

Exemplos.

1) Seja $u = x + y + z$, então,

$$|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y| + |\Delta^* z|.$$

2) Seja $u = x - y$, então,

$$|\Delta^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y|.$$

3) Seja $u = xy$, então,

$$|\Delta^* u| = |x|\,|\Delta^* y| + |y|\,|\Delta^* x|.$$

4) Seja $u = \dfrac{x}{y}$, então.

$$|\Delta^* u| = \left|\frac{1}{y}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{x}{y^2}\right| |\Delta^* y| = \frac{|y|\,|\Delta^* x| + |x|\,|\Delta^* y|}{y^2}.$$

5. Mede-se a hipotenusa c e o lado b dum triângulo rectângulo ABC com os erros absolutos máximos $|\Delta^* c| = 0,2$, $|\Delta^* a| = 0,1$. Acha-se, respectivamente, $c = 75$ e $a = 32$. Determinar o ângulo A pela fórmula $\operatorname{sen} A = \dfrac{a}{c}$ e o erro máximo absoluto $|\overline{\Delta A}|$ cometido ao calcular este ângulo.

Resolução — Sen $A = \dfrac{a}{c}$, $A = \operatorname{arc\,sen}$, por conseguinte,

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad \frac{\partial A}{\partial c} = -\frac{a}{c\sqrt{c^2 - a^2}}.$$

Encontramos, segundo a fórmula (2):

$$|\overline{\Delta A}| = \frac{1}{\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0,1 + \frac{32}{75\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0,2 = 0,00275 \text{ rd} = 9'38''.$$

Logo,

$$A = \operatorname{arc\,sen} \frac{32}{75} \pm 9'38''.$$

6. Determinou-se o lado $b = 121,56$ m e o ângulo $A = 25° 21' 40''$ dum triângulo rectângulo ABC. Os erros absolutos máximos, cometidos no decurso da avaliação destas grandezas, são, respectivamente, $|\Delta^* b| = 0,05$ m e $|\Delta^* A| = 12''$.

Determinar o erro máximo absoluto cometido, calculando o lado a pela fórmula $a = b \cdot \operatorname{tg} A$.

Resolução — Achamos, em virtude da fórmula (2):

$$|\Delta^* a| = |\operatorname{tg} A| \cdot |\Delta^* b| + \frac{|b|}{\cos^2 A} |\Delta^* A|.$$

Substituindo os valores correspondentes (e exprimindo $|\Delta^* A|$ em radianos), temos:

$$|\Delta^* a| = \operatorname{tg} 25°21'40'' \cdot 0{,}05 + \frac{121{,}56}{\cos^2 25°21'40''} \frac{12}{206\,265} = 0{,}0237 + 0{,}0087 = 0{,}0324 \text{ m}.$$

Chama-se *erro relativo* da grandeza x ao quociente do erro Δx pelo valor aproximado x desta grandeza. Designa-se por δx,

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}.$$

Chama-se *erro relativo máximo* da grandeza x e anota-se $|\delta^* x|$ ao quociente do erro máximo absoluto e do valor absoluto de x.

$$|\delta^* x| = \frac{|\Delta^* x|}{|x|}. \tag{3}$$

Para avaliar o erro relativo máximo da função u, dividamos todos os membros da igualdade (2) por $|u| = |f(x, y, z, \ldots, t)|$

$$\frac{|\Delta^* u|}{|u|} = \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} \right| |\Delta^* x| + \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} \right| |\Delta^* y| + \ldots + \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f} \right| |\Delta^* t|, \tag{4}$$

mas

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Log} |f|; \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Log} |f|; \ \ldots; \ \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Log} |f|.$$

Eis porque se pode pôr a igualdade (3) sob a forma:

$$|\delta^* u| = \left| \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Log} |f| \right| |\Delta^* x| + \left| \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Log} |f| \right| |\Delta^* y| + \ldots$$

$$\ldots + \left| \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Log} |f| \right| |\Delta^* t| \ldots, \tag{5}$$

ou sob uma forma compacta:

$$|\delta^* u| = |\Delta^* \operatorname{Log} |f||. \tag{6}$$

Resulta da fórmula (3), bem como da fórmula (5), que o erro relativo máximo duma função é igual ao erro absoluto máximo do logarítmo desta função.

Deduzimos da fórmula (6) as regras que se devem aplicar durante os cálculos aproximados.

1. Seja $u = xy$.

Utilizando os resultados do exemplo 3, tem-se

$$|\delta^* u| = \frac{|y||\Delta^* x|}{|xy|} + \frac{|x||\Delta^* y|}{|xy|} = \frac{|\Delta^* x|}{|x|} + \frac{|\Delta^* y|}{|y|} =$$
$$= |\delta^* x| + |\delta^* y|,$$

isto é, o erro relativo máximo do produto é igual à soma dos erros relativos máximos de cada um dos factores.

2. Seja $u = \frac{x}{y}$; utilizando os resultados do exemplo 4, temos:

$$|\delta^* u| = |\delta^* x| + |\delta^* y|.$$

Nota — Resulta do exemplo 2, que se $u = x - y$, então,

$$|\delta^* u| = \frac{|\Delta^* x| + |\Delta^* y|}{|x - y|}.$$

Se os valores de x e y estão próximos, pode acontecer que $|\delta^* u|$ seja muito grande em relação à grandeza procurada $x - y$. É preciso ter em conta esta circunstância durante os cálculos.

Exemplo — 7. O período das oscilações dum pêndulo é igual a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

em que l designa o comprimento do pêndulo e g a aceleração da gravidade.

Que erro cometemos nós, ao determinar T por esta fórmula, tomando $\pi \approx 3{,}14$ (aproximadamente a 0,005), $l = 1$ m (aproximadamente a 0,01), $g = 9{,}8$ m/s^2).

Resolução — O erro relativo máximo, é igual, em virtude da fórmula (6), a

$$|\delta^* T| = |\Delta^* \operatorname{Log} T|.$$

Mas

$$\operatorname{Log} T = \operatorname{Log} 2 + \operatorname{Log} \pi + \frac{1}{2} \operatorname{Log} l - \frac{1}{2} \operatorname{Log} g.$$

Calculemos $|\Delta^* \operatorname{Log} T|$. Tendo em atenção de que $\pi \approx 3{,}14$, $\Delta^* \pi = 0{,}005$, $l = 1$ m, $\Delta^* l = 0{,}01$ m, $g = 9{,}8$ m/s^2, $\Delta^* g = 0{,}02$ m/s^2, temos

$$\Delta^* \operatorname{Log} T = \frac{\Delta^* \pi}{\pi} + \frac{\Delta^* l}{2l} + \frac{\Delta^* g}{2g} = \frac{0{,}005}{3{,}14} + \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}02}{2 \cdot 9{,}8} = 0{,}0076.$$

O erro máximo relativo é, pois, igual a

$$\delta^* T = 0{,}0076 = 0{,}76\ \%.$$

§ 10. Derivada duma função composta. Derivada total

Suponhamos que na equação

$$z = F(u, v) \tag{1}$$

u e v são funções das variáveis independentes x e y:

$$u = \varphi(x, y); \quad v = \psi(x, y). \tag{2}$$

Neste caso, z é uma função composta das variáveis x e y. Pode-se, evidentemente, exprimir z directamente em função de x e y;

$$z = F[\varphi(x, y), \psi(x, y)]. \tag{3}$$

Exemplo — 1. **Seja**

$$z = u^3v^3 + u + 1; \quad u = x^2 + y^2; \quad v = e^{x+y} + 1;$$

então,

$$z = (x^2 + y^2)^3 (e^{x+y} + 1)^3 + (x^2 + y^2) + 1.$$

Suponhamos que todas as derivadas parciais da função $F(u, v)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ são contínuas e proponhamo-nos calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ a partir das equações (1) e (2) sem utilizar a igualdade (3).

Demos à variável x um crescimento Δx, conservando y constante. Então, u e v recebem, respectivamente, em virtude da equação (2), um crescimento $\Delta_x u$ e $\Delta_x v$.

Mas, então, se as variáveis u e v recebem, respectivamente, o crescimento $\Delta_x u$ e $\Delta_x v$, a função $z = F(u, v)$ receberá, por sua vez, um crescimento Δz, definido pela fórmula (5'), § 7, Cap. VIII:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v.$$

Dividamos todos os membros desta igualdade por Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Se $\Delta x \to 0$, então, $\Delta_x u \to 0$ e $\Delta_x v \to 0$ (em virtude da continuidade das funções u e v). Mas, então, γ_1 e γ_2 tendem igualmente para zero. Passando ao limite, para $\Delta x \to 0$, tem-se:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \gamma_1 = 0; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \gamma_2 = 0$$

e, por conseguinte,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4}$$

Se tivessemos dado um crescimento Δy à variável y e conservado x constante, teríamos tido, raciocinando da mesma maneira:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4'}$$

Exemplo — 2.

$$z=\text{Log}\,(u^2+v)\,; \qquad u=e^{x+y^2}\,; \qquad v=x^2+y\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{u^2+v}\,; \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{u^2+v}\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x+y^2}\,; \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x+y^2}\,; \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=2x\,; \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=1.$$

Utilizando as fórmulas (4) e (4'), encontra-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v}e^{x+y^2}+\frac{1}{u^2+v}2x=\frac{2}{u^2+v}(ue^{x+y^2}+x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2u}{u^2+v}2ye^{x+y^2}+\frac{1}{u^2+v}=\frac{1}{u^2+v}(2uye^{x+y^2}+1).$$

As fórmulas (4) e (4') podem ser naturalmente generalizadas ao caso dum maior número de variáveis.

Por exemplo, se $w=F(z,\,u,\,v,\,s)$ é uma função de quatro variáveis $z,\,u,\,v,\,s$ e se cada uma destas variáveis depende, por sua vez, de x e y, as fórmulas (4) e (4') transformam-se em:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x},\\ \frac{\partial w}{\partial y}&=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Se a função $z=F(x,\,y,\,u,\,v)$ é tal que as variáveis $y,\,u,\,v$ dependem, por sua vez, da única variável x:

$$y=f(x)\,; \qquad u=\varphi(x)\,; \qquad v=\psi(x),$$

ela é, em suma, função duma só variável x; pode-se, então, propor calcular a derivada $\dfrac{dz}{dx}$.

Esta derivada pode ser calculada segundo a primeira das fórmulas (5):

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

mas como y, u, v não dependem senão de uma só variável x, as derivadas parciais correspondentes são, de facto, derivadas ordinárias; além disso, $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$; por conseguinte,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \tag{6}$$

É a fórmula da *derivada total* $\frac{dz}{dx}$ $\left(\text{por oposição à derivada } \textit{parcial } \frac{\partial z}{\partial x}\right)$.

Exemplo — 3.

$$z = x^2 + \sqrt{y}, \qquad y = \operatorname{sen} x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}; \quad \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Segundo a fórmula (6),

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x = 2x + \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\cos x.$$

§ 11. Derivação das funções implícitas

Vamos abordar este problema pelo estudo duma função implícita duma só variável (*). Seja y a função de x definida pela equação

$$F(x, y) = 0.$$

Demonstremos o teorema seguinte.

Teorema — *Seja* y *uma função contínua de* x, *definida pela equação implícita*

$$F(x, y) = 0,$$

em que $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ *são funções contínuas num certo domínio* D *contendo o ponto* (x, y), *cujas coordenadas verificam a equação (1); além disso, suponhamos que nesse ponto* $F'_y(x, y) \neq 0$. *A derivada da função* y *de* x, *é, então, igual a*

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

(*) No § 11 do Cap. III, resolvemos o problema da derivação das funções implícitas. Contudo, apenas tínhamos considerado certos exemplos e não tínhamos obtido a fórmula geral, nem determinado as condições de existência desta derivada.

Demonstração — Suponhamos que a um certo valor de x corresponde um certo valor da função implícita y. Logo,

$$F(x, y) = 0.$$

Atribuamos à variável independente x um crescimento Δx. A função y recebe, então, um crescimento Δy, por outras palavras, ao valor $x + \Delta x$ da variável independente corresponde o valor $y + \Delta y$ da função. Em virtude da equação $F(x, y) = 0$, temos:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Por conseguinte,

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

O primeiro membro desta igualdade representa o crescimento total da função de duas variáveis. Em virtude da fórmula (5'), § 7, pode-se pô-lo sob a forma:

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y,$$

em que γ_1 e γ_2 tendem para zero quando Δx e Δy tendem para zero. Sendo o primeiro membro desta última igualdade igual a zero, pode-se escrever

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y = 0.$$

Dividamos esta igualdade por Δx e calculemos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial y} + \gamma_2}.$$

Façamos tender Δx para zero. Temos, então, no limite, visto que γ_1 e γ_2 tendem igualmente para zero e que $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$:

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{1}$$

Assim, demonstramos a existência da derivada y'_x duma função implícita e obtivemos uma fórmula adequada para o cálculo desta derivada.

Exemplo — 1. A equação

$$x^2+y^2-1=0$$

define, implìcitamente, y em função de x. Neste caso

$$F(x, y)=x^2+y^2-1, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y.$$

Por conseguinte, em virtude da fórmula (1),

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}.$$

Notemos que esta equação define duas funções implícitas diferentes (visto que, a cada valor de x tomado no intervalo $(-1, 1)$, correspondem dois valores de y), mas que o valor encontrado da derivada y'_x é válida para ambas.

Exemplo — 2. Seja a equação

$$e^y-e^x+xy=0.$$

Aqui $F(x, y)=e^y-e^x+xy$;

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-e^x+y; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=e^y+x.$$

Por conseguinte, obtém-se em virtude da fórmula (1):

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-e^x+y}{e^y+x}=\frac{e^x-y}{e^y+x}.$$

Consideremos, agora, uma equação da forma

$$F(x, y, z)=0. \tag{2}$$

Se a cada par de valores x e y, tomados num certo domínio, correspondem um ou vários valores de z que satisfaçam à equação (2), esta equação define, implìcitamente, uma ou várias funções unívocas z de x e y.

Por exemplo, equação

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

define, implìcitamente, duas funções contínuas z de x e y que se pode exprimir explìcitamente resolvendo a equação em relação a z; obtemos, então,

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2} \quad \text{e} \quad z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Calculemos as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ da função implícita z de x e y definida pela equação (2).

Para calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, supomos y constante. Eis porque podemos utilizar a fórmula (1), considerando z como uma função da variável independente x. Logo,

$$z'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Obter-se-ia, do mesmo modo,

$$z'_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

supondo $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Definem-se e calculam-se, da mesma maneira, as funções implícitas dum número qualquer de variáveis e suas derivadas parciais.

Exemplo — 3.

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Ter-se-ia obtido o mesmo resultado derivando a função explícita como se a tivesse resolvido em relação a z.

Exemplo — 4.

$$e^z + x^2y + z + 5 = 0.$$

Aqui $F(x, y, z) = e^z + x^2y + z + 5$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}.$$

§ 12. Derivadas parciais de diferentes ordens

Seja

$$z = f(x, y)$$

uma função de duas variáveis independentes.

As derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ desta função são, em regra, funções de x e de y. Eis porque podemos calcular as suas derivadas parciais. Por conseguinte, as derivadas parciais de

segunda ordem duma função de duas variáveis são em número de *quatro*, visto que cada função $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ pode ser derivada em relação a x e em relação a y.

Designam-se, pelas notações seguintes, as derivadas parciais de segunda ordem:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$; deriva-se, sucessivamente, a função f duas vezes em relação a x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f''_{xy}(x, y)$; deriva-se, em primeiro lugar, f em relação a x, depois o resultado em relação a y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = f''_{yx}(x, y)$; deriva-se, em primeiro lugar, f em relação a y, depois o resultado em relação a x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$; deriva-se, sucessivamente, a função f duas vezes em relação a y.

Pode-se em seguida derivar, de novo, as derivadas parciais de segunda ordem em relação a x ou a y. Obtém-se, então, as derivadas parciais de terceira ordem, que são em número de oito:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y\, \partial x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x\, \partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\, \partial x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Duma maneira geral, chama-se *derivada parcial da ordem n* à derivada primeira da derivada de ordem $(n - 1)$.

Por exemplo, $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ é uma derivada de ordem n; derivamos, neste caso, primeiramente p vezes z em relação a x e em seguida $n - p$ vezes em relação a y.

Definem-se, da mesma maneira, as derivadas parciais de ordem superior para funções dum número qualquer de variáveis.

Exemplo — 1. Calcular as derivadas parciais de segunda ordem da função

$$f(x, y) = x^2 y + y^3.$$

Resolução **— Obtemos, sucessivamente:**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial (2xy)}{\partial y} = 2x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial (x^2 + 3y^2)}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Exemplo — 2. Calcular $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$ e $\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}$ se

$$z=y^2e^x+x^2y^3+1.$$

Resolução — Obtemos, sucessivamente:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2e^x+2xy^3\,;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^x+2y^3\,;\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=2ye^x+6y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^x+3x^2y^2\,;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=2ye^x+6xy^2\,;\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}=2ye^x+6y^2.$$

Exemplo — 3. Calcular $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y\,\partial z}$ se $u=z^2e^{x+y^2}$.

Resolução.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=z^2e^{x+y^2}\,;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=z^2e^{x+y^2},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}=2yz^2e^{x+y^2},\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y\,\partial z}=4yze^{x+y^2}\,.$$

Uma questão se põe. O resultado da derivação duma função de várias variáveis depende da ordem pela qual se efectuem as derivadas sucessivas em relação às diferentes variáveis independentes; por outras palavras, as derivadas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial^3 f(x,\ y,\ t)}{\partial x\,\partial y\,\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^3 f(x,\ y,\ t)}{\partial t\,\partial x\,\partial y},\quad \text{etc.}$$

serão idênticas?

A resposta a esta pergunta é-nos dada pelo teorema seguinte.

Teorema — *Se a função* z = f (x, y) *e as suas derivadas parciais* f'_x, f'_y, f''_{xy} *e* f''_{yx} *são definidas e contínuas no ponto* M (x, y) *e na vizinhança deste ponto então, neste ponto,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \qquad (f''_{xy}=f''_{yx}).$$

Demonstração — Consideremos a expressão:

$$A=[f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x+\Delta x,\ y)]-$$
$$-[f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)].$$

Introduzamos a função auxiliar $\varphi(x)$, definida pela igualdade

$$\varphi(x)=f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y).$$

Pode-se, então, pôr A sob a forma:

$$A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

Sendo f'_x, por hipótese, definida na vizinhança do ponto (x, y), a função $\varphi(x)$ é derivável sobre o segmento $[x, x + \Delta x]$; mas, então, aplicando o teorema de Lagrange, tem-se:

$$A = \Delta x \varphi'(\bar{x}),$$

em que $\bar{x}$ está compreendido entre x e $x + \Delta x$.

Mas

$$\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y).$$

Por outro lado, f''_{xy} é definida na vizinhança do ponto (x, y), por conseguinte, f'_x é derivável sobre o segmento $[y, y + \Delta y]$ e aplicando o teorema de Lagrange a esta diferença (relativamente à variável y), tem-se:

$$f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y) = \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}),$$

em que $\bar{y}$ está compreendido entre y e $y + \Delta y$.

Obtemos, então, a expressão seguinte para A

$$A = \Delta x \, \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}). \qquad (1)$$

Mudando a ordem dos termos, ter-se-á

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] -$$
$$- [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)].$$

Introduzamos a função auxiliar

$$\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

então,

$$A = \psi(y + \Delta y) - \psi(y).$$

Aplicando de novo o teorema de Lagrange, tem-se:

$$A = \Delta y \cdot \psi'(\bar{\bar{y}}),$$

em que $\bar{\bar{y}}$ está compreendido entre y e $y + \Delta y$.

Mas

$$\psi'(\bar{\bar{y}}) = f'_y(x + \Delta x, \bar{\bar{y}}) - f'_y(x, \bar{\bar{y}}).$$

Aplicando uma vez mais o teorema de Lagrange, obtém-se:

$$f'_y(x + \Delta x, \bar{\bar{y}}) - f'_y(x, \bar{\bar{y}}) = \Delta x f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}),$$

em que $\bar{\bar{x}}$ está compreendido entre x e $x + \Delta x$.

Então, A pode ser posto sob a forma

$$A = \Delta y \, \Delta x f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}). \qquad (2)$$

Os primeiros membros das igualdade (1) e (2) são iguais a A, por conseguinte, os segundos membros são iguais entre si; por outras palavras,

$$\Delta x\, \Delta y f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \Delta y\, \Delta x f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}),$$

donde

$$f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}).$$

Passando ao limite nesta igualdade, quando $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$, tem-se:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}).$$

As derivadas f''_{xy} e f''_{yx} sendo contínuas no ponto (x, y), tem-se:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{xy}(x, y) \text{ et } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) = f''_{yx}(x, y).$$

Temos, finalmente:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y),$$

o que queríamos demonstrar.

Resulta deste teorema que se as derivadas parciais $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ e $\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k} \partial x^k}$ são contínuas, então, tem-se

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k\, \partial y^{n-k}} = \frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k}\, \partial x^k}.$$

Um teorema análogo é verdadeiro para as funções dum número qualquer de variáveis.

Exemplo — 4. Calcular $\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$ e $\frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial z\, \partial x}$ se

$$u = e^{xy} \operatorname{sen} z.$$

Resolução.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y e^{xy} \operatorname{sen} z\,; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = e^{xy} \operatorname{sen} z + xy e^{xy} \operatorname{sen} z = e^{xy}(1 + xy) \operatorname{sen} z\,;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = e^{xy}(1 + xy) \cos z\,; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x e^{xy} \operatorname{sen} z\,; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = x e^{xy} \cos z\,;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial z\, \partial x} = e^{xy} \cos z + xy e^{xy} \cos z = e^{xy}(1 + xy) \cos z.$$

Por conseguinte,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial z\, \partial x}$$

(os exemplos, 1 e 2, deste parágrafo).

§ 13. Superfícies de nível

Seja no espaço (x, y, z) um domínio D no qual é dada a função

$$u = u(x, y, z). \tag{1}$$

Diz-se, neste caso, que no domínio D está definido um campo escalar. Se, por exemplo, $u(x, y, z)$ designa a temperatura no ponto $M(x, y, z)$ diz-se que está definido um campo escalar de temperatura;

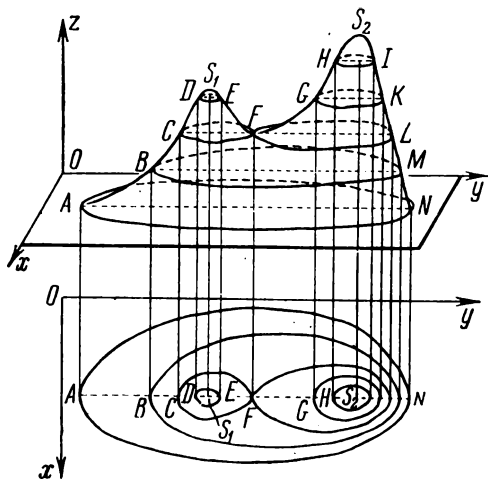



Fig. 175

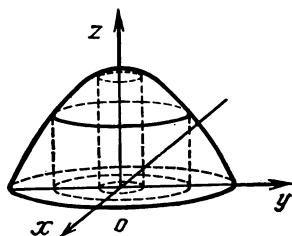



Fig. 176

se o domínio D está cheio de líquido ou de gás e se $u(x, y, z)$ designar a pressão, está-se em presença dum campo escalar de pressão, etc.

Consideremos o ponto do domínio D em que a função $u(x, y, z)$ possui um valor constante c:

$$u(x, y, z) = c. \tag{2}$$

O conjunto destes pontos constitui uma certa superfície. Se se toma um outro valor de c, obtém-se uma outra superfície. Estas superfícies são chamadas *superfícies de nível.*

Exemplo — 1. Seja dado o campo escalar

$$u(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}.$$

As superfícies de nível serão, aqui,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = c,$$

isto é, elipsóides de semi-eixos $2\sqrt{c}$, $3\sqrt{c}$, $4\sqrt{c}$.

Se a função u depende de duas variáveis x e y:

$$u = u(x, y),$$

as «superfícies» de nível serão linhas no plano Oxy:

$$u(x, y) = c, \qquad (2')$$

que se chamam *linhas de nível*

Se conduzirmos os valores de u sobre o eixo Oz:

$$z = u(x, y),$$

as linhas de nível no plano Oxy serão as projecções das linhas formadas pela intersecção da superfície $z = u(x, y)$ com os planos $z = c$ (fig. 175). Conhecendo as linhas de nível pode-se fàcilmente estudar a natureza da superfície $z = u(x, y)$.

Exemplo — 2. Determinar as linhas de nível da função $z = 1 - x^2 - y^2$. As linhas de nível serão as linhas de equações $1 - x^2 - y^2 = c$. São círculos (fig. 176) de raio $\sqrt{1 - c}$. Em particular, quando $c = 0$, obtemos o círculo $x^2 + y^2 = 1$.

§ 14. Derivada segundo uma dada direcção

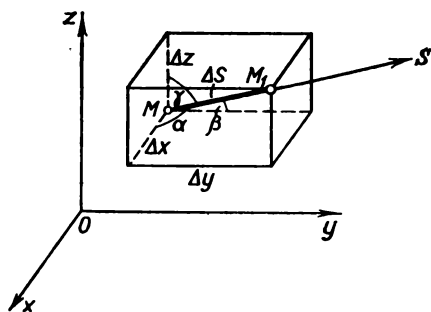
Consideremos no domínio D uma função $u(x, y, z)$ e um ponto $M(x, y, z)$. Tracemos do ponto M o vector S cujos cossenos directores são $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (fig. 177). Consideremos sobre o vector S a uma distância Δs da sua origem o ponto $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Assim,

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Fig. 177

Suporemos que a função $u(x, y, z)$ é contínua e possui derivadas contínuas em relação às variáveis independentes no domínio D.

Do mesmo modo que o fizemos no § 7, representemos o crescimento total da função da maneira seguinte:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z, \qquad (1)$$

em que ε_1, ε_2, e ε_3 tendem para zero quando $\Delta s \to 0$. Dividamos todos os termos da igualdade (1) por Δs:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s}. \quad (2)$$

É evidente que:

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \qquad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma.$$

Por conseguinte, a igualdade (2) pode ser posta sob a forma

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma +$$

$$+ \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma. \quad (3)$$

O limite do quociente $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ quando $\Delta s \to 0$ chama-se *derivada da função* $u = u(x, y, z)$ no ponto (x, y, z) segundo a direcção do vector S, e notado por $\frac{\partial u}{\partial s}$, isto é,

$$\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}. \quad (4)$$

Assim, passando ao limite na igualdade (3), obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \quad (5)$$

Resulta da fórmula (5) que, conhecendo as derivadas parciais, se pode determinar fàcilmente a derivada, segundo uma direcção qualquer S. As derivadas parciais apenas são um caso particular da derivada, segundo uma dada direcção. Por exemplo, se $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Exemplo — Seja dada a função

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

Achar a derivada $\frac{\partial u}{\partial s}$ no ponto $M(1, 1, 1)$:

a) na direcção do vector $S_1 = 2i + j + 3k$;
b) na direcção do vector $S_2 = i + j + k$.

Resolução — *a*) Acham-se os cossenos directores do vector S_1:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Por conseguinte,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

As derivadas parciais no ponto $M(1, 1, 1)$, serão

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 2.$$

Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}.$$

b) Calculemos os cossenos directores do vector S_2:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Por conseguinte,

$$\frac{\partial u}{\partial s_2} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Notemos que, $2\sqrt{3} > \frac{12}{\sqrt{14}}$ (fig. 178).

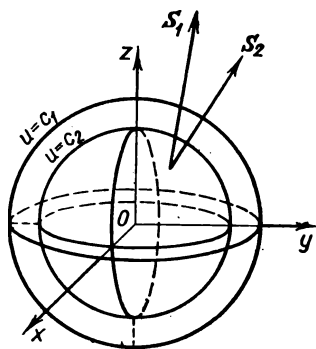



Fig. 178

§ 15. Gradiente

Em cada ponto do domínio D onde é dada uma certa função $u = u(x, y, z)$, definamos um vector, cujas projecções sobre os eixos das coordenadas são os valores das derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ dessa função no ponto correspondente:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{1}$$

Este vector chama-se *gradiente* da função $u(x, y, z)$. Diz-se, então, que no domínio D está definido o *campo vectorial dos gradientes*. Demonstremos o teorema seguinte, estabelecendo a ligação entre o gradiente e a derivada segundo uma dada direcção.

Teorema — *Seja dado um campo escalar* u = u (x, y, z) *e neste campo escalar o campo dos gradientes*

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \boldsymbol{k}.$$

A derivada $\frac{\partial u}{\partial s}$ *segundo a direcção dum certo vector* $\boldsymbol{S}$ *é igual à projecção do vector* grad u *sobre o vector* $\boldsymbol{S}$.

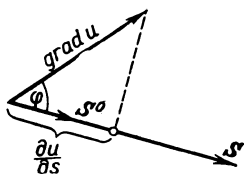
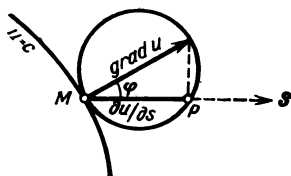



Fig. 179 Fig. 180

Demonstração — Consideremos o vector unitário $\boldsymbol{S}^0$, correspondente ao vector $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S}^0 = \boldsymbol{i} \cos \alpha + \boldsymbol{j} \cos \beta + \boldsymbol{k} \cos \gamma.$$

Calculemos o produto escalar dos vectores grad u e $\boldsymbol{S}^0$:

$$\text{grad } u \cdot \boldsymbol{S}^0 = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \tag{2}$$

A expressão do segundo membro desta igualdade é a derivada da função $u(x, y, z)$, segundo a direcção $\boldsymbol{S}$. Por conseguinte, podemos escrever.

$$\text{grad } u \cdot \boldsymbol{S}^0 = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Designando por φ o ângulo compreendido entre os vectores grad u e $\boldsymbol{S}^0$ (fig. 179) podemos escrever:

$$|\text{grad } u| \cos \varphi = \frac{\partial u}{\partial s} \tag{3}$$

ou

$$\text{pr}_{\boldsymbol{S}^0} \text{ grad } u = \frac{\partial u}{\partial s}. \tag{4}$$

O teorema está demonstrado.

O teorema que demonstramos estabelece uma ligação concreta entre o gradiente da derivada segundo uma dada direcção. Construamos no ponto $M(x, y, z)$ o vector grad u (fig. 180). Construamos a esfera

para a qual grad u é o diâmetro. Do ponto M tracemos o vector S. Designemos o ponto de intersecção do vector S com a superfície da esfera por P. É, então, evidente que $MP = |\text{grad } u| \cos \varphi$, se φ for o ângulo compreendido entre as direcções do gradiente e o segmento MP $\left(\text{então, } \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, isto é, $MP = \frac{\partial u}{\partial s}$.

É evidente que quando se inverte a direcção do vector S, a derivada muda de sinal, logo, o seu valor absoluto não é modificado.

Estabeleçamos certas propriedades do gradiente.

1) *A derivada num dado ponto segundo a direcção do vector S admite um valor máximo quando a direcção do vector S coincide com a do gradiente; este valor máximo da derivada é igual a grad* u .

Esta proposição resulta imediatamente da igualdade (3): o valor máximo $\frac{\partial s}{\partial u}$ será para $\varphi = 0$ e neste caso

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u|.$$

2) *A derivada, segundo a direcção do vector tangente, à superfície de nível é nula.*

Esta afirmação resulta da fórmula (3).

Com efeito, neste caso,

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \cos \varphi = 0$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u| \cos \varphi = 0.$$

Exemplo — 1. Seja dada a função

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

a) Determinar o gradiente no ponto $M(1, 1, 1)$. A expressão do gradiente desta função num ponto arbitrário será

$$\text{grad } u = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}.$$

Por conseguinte,

$$(\text{grad } u)_M = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad |\text{grad } u|_M = 2\sqrt{3}.$$

b) Determinemos a derivada da função u no ponto $M(1, 1, 1)$ na direcção do gradiente. Os cossenos directores do gradiente serão

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Por conseguinte,

$$\frac{\partial u}{\partial s}=2\frac{1}{\sqrt{3}}+2\frac{1}{\sqrt{3}}+2\frac{1}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3},$$

isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial s}=|\operatorname{grad} u|.$$

Nota — Se a função $u = u(x, y)$ é uma função de duas variáveis, o vector

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

está situado no plano Oxy. Demonstremos que o grad u *está orientado perpendicularmente à linha de nível* $u(x, y) = c$, situada no plano Oxy.

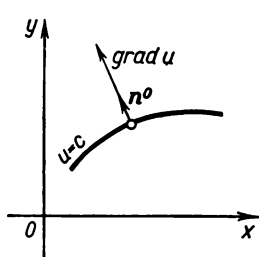
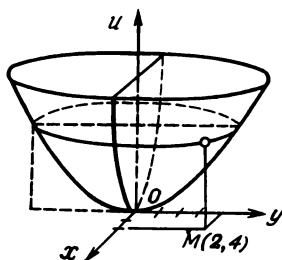
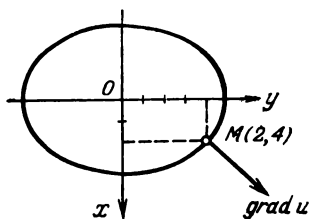



Fig. 181 Fig. 182 Fig. 183

e passando pelo ponto correspondente. Com efeito, o coeficiente angular k_1 da tangente à linha de nível $u(x, y) = c$ será igual a $k_1 = -\frac{u'_x}{u'_y}$.

O coeficiente angular k_2 do gradiente é igual a $k_2 = \frac{u'_y}{u'_x}$. É evidente que $k_1 k_2 = -1$.

Isto demonstra a exactidão da nossa afirmação (fig. 181). Estabeleceremos uma propriedade análoga do gradiente duma função de três variáveis no § 6 do Cap. IX.

Exemplo — 2. Determinar o gradiente da função $u=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}$ (fig. 182), no ponto $M(2, 4)$.

Resolução — Aqui,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x\Big|_M=2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2}{3}y\Big|_M=\frac{8}{3}.$$

Por conseguinte,

$$\operatorname{grad} u=2\boldsymbol{i}+\frac{8}{3}\boldsymbol{j}.$$

A equação da linha de nível (fig. 183), que passa pelo ponto dado, será

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=\frac{22}{3}.$$

§ 16. Fórmula de Taylor para uma função de duas variáveis

Seja

$$z = f(x, y)$$

uma função de duas variáveis, contínua, bem como as suas derivadas parciais de ordem $(n + 1)$ inclusivé, numa certa vizinhança do ponto $M(a, b)$. Pode-se, então, representar (do mesmo modo que no caso duma função duma só variável independente, ver § 6, Cap. IV), esta função de duas variáveis como sendo a soma dum polinómio de grau n segundo as potências inteiras de $(x - a)$ e $(y - b)$ e de um resto. Vamos demonstrar que para $n = 2$ esta fórmula é da forma

$$f(x, y) = A_0 + D(x - a) + E(y - b) + \\ + \frac{1}{2!}[A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2] + R_2, \quad (1)$$

em que os coeficientes A_0, D, E, A, B, C não dependem de x e y e o resto R_2 tem uma estrutura análoga à do resto da fórmula de Taylor para uma função duma só variável.

Apliquemos a fórmula de Taylor à função $f(x, y)$ considerada como função duma só variável y, sendo x considerado constante (limitemo-nos aos termos da segunda ordem).

$$f(x, y) = f(x, b) + \frac{y - b}{1} f'_y(x, b) + \\ + \frac{(y - b)^2}{1 \cdot 2} f''_{yy}(x, b) + \frac{(y - b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{yyy}(x, \eta_1), \quad (2)$$

em que $\eta_1 = b + \theta_1(y - b)$, $0 < \theta_1 < 1$.

Desenvolvamos as funções $f(x, b)$, $f'_y(x, b)$, $f''_{yy}(x, b)$ segundo as potências inteiras de $(x - a)$ pela fórmula de Taylor, limitando-nos às derivadas mistas da terceira ordem inclusivé:

$$f(x, b) = f(a, b) + \frac{x - a}{1} f'_x(a, b) + \frac{(x - a)^2}{1 \cdot 2} f''_{xx}(a, b) + \\ + \frac{(x - a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b), \quad (3)$$

em que

$$\xi_1 = x + \theta_2(x - a), \quad 0 < \theta_2 < 1;$$

$$f'_y(x, b) = f'_y(a, b) + \\ + \frac{x - a}{1} f''_{yx}(a, b) + \frac{(x - a)^2}{1 \cdot 2} f'''_{yxx}(\xi_2, b), \quad (4)$$

em que

$$\xi_2 = x + \theta_3 (x - a), \quad 0 < \theta_3 < 1;$$

$$f''_{yy}(x, b) = f''_{yy}(a, b) + \frac{x - a}{1} f'''_{yyx}(\xi_3, b), \tag{5}$$

em que

$$\xi_3 = x + \theta_4 (x - a), \quad 0 < \theta_4 < 1.$$

Substituindo as expressões (3), (4), (5) na fórmula (2), temos:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{x - a}{1} f'_x(a, b) + \frac{(x - a)^2}{1 \cdot 2} f''_{xx}(a, b) +$$

$$+ \frac{(x - a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{xxx}(\xi_1, b) + \frac{y - b}{1} \left[f'_y(a, b) + \right.$$

$$\left. + \frac{x - a}{1} f''_{yx}(a, b) + \frac{(x - a)^2}{1 \cdot 2} f'''_{yxx}(\xi_2, b) \right] +$$

$$+ \frac{(y - b)^2}{1 \cdot 2} \left[f''_{yy}(a, b) + \frac{x - a}{1} f'''_{yyx}(\xi_3, b) \right] + \frac{(y - b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{yyy}(x, \eta).$$

Restabelecendo a ordem da escrita indicada na fórmula (1), temos:

$$f(x, y) = f(a, b) + (x - a) f'_x(a, b) + (y - b) f'_y(a, b) +$$

$$+ \frac{1}{2!} [(x - a)^2 f''_{xx}(a, b) + 2 (x - a)(y - b) f''_{xy}(a, b) +$$

$$+ (y - b)^2 f''_{yy}(a, b)] + \frac{1}{3!} [(x - a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1, b) +$$

$$+ 3 (x - a)^2 (y - b) f'''_{xxy}(\xi_2, b) + 3 (x - a)(y - b)^2 f'''_{xyy}(\xi_3, b) +$$

$$+ (y - b)^3 f'''_{yyy}(a, \eta)]. \tag{6}$$

Esta expressão constitui precisamente a fórmula de Taylor para $n = 2$. A expressão

$$R_2 = \frac{1}{3!} [(x - a)^3 f'''_{xxx}(\xi_1, b) + 3 (x - a)^2 (y - b) f'''_{xxy}(\xi_2, b) +$$

$$+ 3 (x - a)(y - b)^2 f'''_{xyy}(\xi_3, b) + (y - b)^3 f'''_{yyy}(a, \eta)]$$

é chamada resto. Façamos, em seguida, $x - a = \Delta x$, $y - b = \Delta y$, $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Transformemos R_2:

$$R_2 = \frac{1}{3!}\left[\frac{\Delta x^3}{\Delta\rho^3} f'''_{xxx}(\xi_1, b) + 3\frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta\rho^3} f'''_{xxy}(\xi_2, b) + \right.$$

$$\left. + 3\frac{\Delta x \Delta y^2}{\Delta\rho^3} f'''_{xyy}(\xi_3, b) + \frac{\Delta y^3}{\Delta\rho^3} f'''_{yyy}(a, \eta)\right]\Delta\rho^3.$$

Dado que $|\Delta x| < \Delta\rho$, $|\Delta y| < \Delta\rho$ e que, por hipótese, as derivadas de ordem três são limitadas, então, o coeficiente de $\Delta\rho^3$ é limitado no domínio considerado; designemo-lo por α_0.

Pode-se, então, escrever:

$$R_2 = \alpha_0 \Delta\rho^3.$$

A fórmula de Taylor (6), para o caso $n = 2$, pode, então, ser posta sob a forma

$$f(x, y) = f(a, b) + \Delta x f'_x(a, b) + \Delta y f'_y(a, b) +$$

$$+ \frac{1}{2!}[\Delta x^2 f''_{xx}(a, b) + 2\Delta x \Delta y f''_{xy}(a, b) +$$

$$+ \Delta y^2 f''_{yy}(a, b)] + \alpha_0 \Delta\rho^3. \qquad (6')$$

Para qualquer n, a fórmula de Taylor exprime-se sob uma forma análoga.

§ 17. Máximo e mínimo duma função de várias variáveis

Definição — 1. Diz-se que a função $z = f(x, y)$ admite um *máximo* no ponto $M_0(x_0, y_0)$, (isto é, quando $x = x_0$ e $y = y_0$), se

$$f(x_0, y_0) > f(x, y)$$

para todos os pontos (x, y) suficientemente vizinhos do ponto (x_0, y_0), mas diferentes deste ponto.

Definição — 2. Diz-se que a função $z = f(x, y)$ tem um *mínimo* no ponto $M_0(x_0, y_0)$, se

$$f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

para todos os pontos (x, y) suficientemente vizinhos do ponto (x_0, y_0), mas diferente deste ponto.

Ao máximo e ao mínimo duma função chamam-se extremos dessa função; por outras palavras, diz-se que uma função admite um extremo num dado ponto, se ela tem nesse ponto um máximo ou um mínimo.

Exemplo — 1. A função

$$z = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1$$

admite um mínimo para $x = 1$, $y = 2$, isto é, no ponto (1, 2). Com efeito, $f(1, 2) = -1$, e como $(x-1)^2$ e $(y-2)^2$ são sempre positivos para $x \neq 1$, $y \neq 2$, tem-se

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1 > -1,$$

isto é,

$$f(x, y) > f(1, 2).$$

Vê-se, na figura 184, a significação geométrica deste resultado.

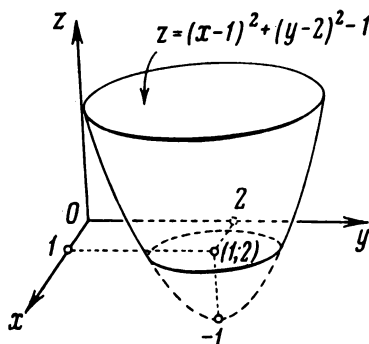



Fig. 184

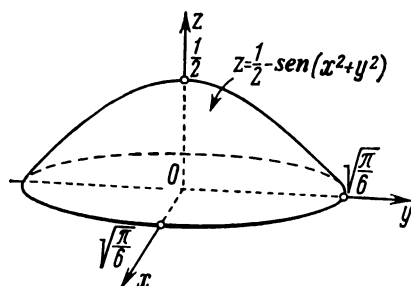



Fig. 185

Exemplo — 2. A função

$$z = \frac{1}{2} - \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$$

admite um máximo na origem das coordenadas (fig. 185).
Com efeito, para $x = 0$, $y = 0$

$$f(0, 0) = \frac{1}{2}.$$

Escolhamos no interior do círculo $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{6}$ um ponto (x, y), diferente do ponto (0, 0); então, para $0 < x^2 + y^2 < \frac{\pi}{6}$,

$$\operatorname{sen}(x^2 + y^2) > 0$$

e deste modo

$$f(x, y) = \frac{1}{2} - \operatorname{sen}(x^2 + y^2) < \frac{1}{2},$$

isto é,

$$f(x, y) < f(0, 0).$$

Pode-se, igualmente, formular como se segue as definições do máximo e do mínimo.

Façamos $x = x_0 + \Delta x$; $y = y_0 + \Delta y$; então,

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f.$$

1) Se $\Delta f < 0$ para todos os crescimentos suficientemente pequenos das variáveis independentes, a função $f(x, y)$ admite um *máximo* no ponto $M(x_0, y_0)$.

2) Se $\Delta f > 0$ para todos os crescimentos suficientemente pequenos das variáveis independentes, a função $f(x, y)$ admite um *mínimo* no ponto $M(x_0, y_0)$.

Estas definições são igualmente válidas para uma função dum número qualquer de variáveis.

Teorema — 1. (Condições necessárias para a existência dum extremo). *Se a função* $z = f(x, y)$ *admite um extremo para os valores* $x = x_0$ *e* $y = y_0$, *então, cada derivada parcial de primeira ordem de* z *anula-se para esses valores das variáveis independentes ou não existe.*

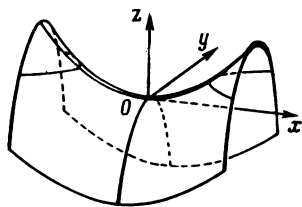



Fig. 186

Com efeito, fixemos o valor de y, $y = y_0$. A função $f(x, y_0)$ será, então, uma função duma só variável x. Esta função admite, por hipótese, um extremo (máximo ou mínimo) no ponto $x = x_0$, por conseguinte, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ anula-se ou não existe neste ponto. Demonstra-se, do mesmo modo, que $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ se anula ou não existe neste ponto.

Este teorema não dá uma condição suficiente para a existência dum extremo. Contudo, se estamos certos da existência dos extremos, ele permite determinar os seus valores. No caso contrário, é preciso fazer um estudo mais detalhado.

Por exemplo, as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x} = +2x$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ da função $z = x^2 - y^2$ anulam-se, para $x = 0$, $y = 0$. Mas esta função não tem nem máximo nem mínimo para estes valores. Com efeito, ela anula-se na origem das coordenadas, mas toma, na vizinhança imediata deste ponto, tanto valores positivos como valores negativos. O valor zero, não é, por conseguinte, um extremo (fig. 186).

Os pontos em que $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (ou não existe) e $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (ou não existe) chamam-se pontos *críticos da função* $z = f(x, y)$. Resulta do teorema 1 que uma função não pode ter extremo a não ser num ponto crítico.

Para fazer o estudo duma função nos pontos críticos estabeleçamos as condições suficientes do extremo duma função de duas variáveis.

Teorema — 2. *Seja* f (x, y) *uma função definida num domínio que contém o ponto* $M_0(x_0, y_0)$ *e cujas derivadas parciais são contínuas até à terceira ordem inclusivé; suponhamos, além disso, que o ponto* $M_0(x_0, y_0)$ *seja um ponto crítico da função* f (x, y), *isto é,*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Então, para $x = x_0$, $y = y_0$:

1) f (x, y) *tem um máximo, se*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0;$$

2) f (x, y) *tem um mínimo, se*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0;$$

3) f (x, y) *não tem nem máximo nem mínimo, se*

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 < 0;$$

4) *Se* $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0,$

pode ou não existir extremo (neste caso, o estudo deve ser mais detalhado).

Demonstração — Escrevamos a fórmula de Taylor para a função $f(x, y)$, limitando-se às derivadas de segunda ordem [fórmula (6), § 16]. Façamos

$$a = x_0, \quad b = y_0, \quad x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y.$$

Temos, então:

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)=f(x_0,\ y_0)+\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}\Delta y+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right]+\alpha_0(\Delta\rho)^3,$$

em que $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, e α_0 tende para zero, quando $\Delta\rho\to 0$.

Por hipótese

$$\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}=0.$$

Por conseguinte.

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)=$$

$$=\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2\right]+\alpha_0(\Delta\rho)^3. \qquad (1)$$

Designemos, respectivamente por A, B, C, os valores tomados no ponto $M_0(x_0,\ y_0)$ pelas derivadas parciais da segunda ordem:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_0}=A\,;\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{M_0}=B\,;\qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{M_0}=C.$$

Designemos por φ o ângulo formado pelo segmento M_0M, em que M é o ponto de coordenadas $M(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$, e o eixo Ox; então,

$$\Delta x=\Delta\rho\cos\varphi\,;\qquad \Delta y=\Delta\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

Substituindo estas expressões na fórmula (1), temos:

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left[A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi+C\,\mathrm{sen}^2\varphi+2\alpha_0\,\Delta\rho\right].$$

Suponhamos que $A\neq 0$.

Multipliquemos e dividamos por A a expressão entre parêntesis; temos:

$$\Delta f=\frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\times$$

$$\times\left[\frac{(A\cos\varphi+B\,\mathrm{sen}\,\varphi)^2+(AC-B^2)\,\mathrm{sen}^2\varphi}{A}+2\alpha_0\,\Delta\rho\right]. \qquad (3)$$

Consideremos, separadamente, os quatro casos possíveis.

1) Seja $AC - B^2 > 0$, $A < 0$. Temos, então, no numerador da fracção a soma de duas quantidades não negativas. Elas não se anulam ao mesmo tempo, visto que a primeira se anula para $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{A}{B}$ e a segunda para $\operatorname{sen} \varphi = 0$.

Se $A < 0$, a fracção é igual a um número negativo, não nulo. Designemo-lo por $-m^2$; então,

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta \rho)^2 [-m^2 + 2\alpha_0 \Delta \rho],$$

em que m não depende de $\Delta\rho$, $\alpha_0 \Delta\rho \to 0$, para $\Delta\rho \to 0$.

Por conseguinte, para $\Delta\rho$, suficientemente pequeno, ter-se-á:

$$\Delta f < 0$$

ou

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0) < 0.$$

Mas então, para todos os pontos $(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ suficientemente vizinhos do ponto $(x_0,\ y_0)$ terá lugar a desigualdade

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) < f(x_0,\ y_0),$$

o que quer dizer que no ponto $(x_0,\ y_0)$ a função $f(x,\ y)$ admite um *máximo*.

2) Seja $AC - B^2 > 0$, $A > 0$. Obtém-se, raciocinando da mesma maneira, que:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta \rho)^2 [m^2 + 2\alpha_0 \Delta \rho]$$

ou

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) > f(x_0,\ y_0),$$

isto é, que a função $f(x,\ y)$ admite *um mínimo* no ponto $(x_0,\ y_0)$.

3′) Seja $AC - B^2 < 0$, $A > 0$. Neste caso, a função não tem nem *máximo* nem *mínimo*. A função cresce, quando se afasta do ponto $(x_0,\ y_0)$, segundo certas direcções, e decresce, segundo outras direcções. Com efeito, se se desloca ao longo do raio $\varphi = 0$, tem-se:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta \rho)^2 [A + 2\alpha_0 \Delta \rho] > 0;$$

a função cresce quando se desloca ao longo deste raio. Se se desloca ao longo do raio $\varphi = \varphi_0$ $\left(\text{onde } \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{A}{B}\right)$, tem-se, quando $A > 0$:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \left[\frac{AC - B^2}{A} \operatorname{sen}^2 \varphi_0 + 2\alpha_0 \Delta\rho\right] < 0;$$

A função decresce quando se desloca ao longo deste raio.

3″) Seja $AC - B^2 < 0$, $A < 0$. *A função não admite, neste caso, nem máximo nem mínimo.*

O estudo detalhado é feito da mesma maneira que no caso 3′.

3‴) Seja $AC - B^2 < 0$, $A = 0$.

Então, $B \neq 0$ e pode-se escrever a igualdade (2) sob a forma:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 [\operatorname{sen} \varphi (2B \cos \varphi + C \operatorname{sen} \varphi) + 2\alpha_0 \Delta\rho].$$

Quando φ é suficientemente pequeno, a expressão entre parêntesis conserva o seu sinal, visto que ela é vizinha de $2B$, logo o factor $\operatorname{sen} \varphi$ muda de sinal conforme φ é maior ou menor que zero (depois de ter escolhido $\varphi > 0$ e $\varphi < 0$, pode-se tomar ρ suficientemente pequeno para que $2\alpha_0$ não influa no sinal da expressão entre parêntesis). Por conseguinte, neste caso, igualmente Δf muda o seu sinal para diferentes φ, isto é, para diferentes Δx e Δy. Logo, a função não apresenta nem máximo nem mínimo neste ponto.

Pode-se, então, qualquer que seja o sinal de A, enunciar a preposição seguinte:

Se $AC - B^2 < 0$ no ponto (x_0, y_0), a função não admite extremo neste ponto. A superfície que representa gràficamente esta função pode, então, por exemplo, ter na vizinhança deste ponto a forma de uma sela (ver mais acima, fig. 186). Diz-se, em casos semelhantes, que a função tem um mínimo neste ponto.

4) Seja $AC - B^2 = 0$. Neste caso, as fórmulas (2) e (3) não nos dão nenhuma indicação sobre o sinal de Δf. Por exemplo, se $A \neq 0$, tem-se:

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 \left[\frac{(A \cos \varphi + B \operatorname{sen} \varphi)^2}{A} + 2\alpha_0 \Delta\rho\right];$$

para $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{A}{B}\right)$ o sinal de Δf é determinado pelo sinal de $2\alpha_0$. Deve-se, então, *empreender um estudo especial* (por exemplo, tomando da fórmula de Taylor, um número mais elevado de termos, ou por um outro processo). Demonstrámos, assim, inteiramente o teorema 2.

Exemplo — 3. **Estudar os máximos e mínimos da função**

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

Resolução — 1. Determinemos os pontos críticos:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y+3\,; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y-2.$$

Resolvendo o sistema de equações

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+3=0, \\ -x+2y-2=0, \end{array}\right\}$$

achamos:

$$x=-\frac{4}{3}\,; \qquad y=\frac{1}{3}\,.$$

2. Calculemos os valores das derivadas parciais de segunda ordem, no ponto crítico $\left(-\frac{4}{3}\,;\ \frac{1}{3}\right)$ e estabeleçamos a natureza deste ponto crítico:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\,; \qquad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-1\,; \qquad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\,;$$

$$AC-B^2=2\cdot 2-(-1)^2=3>0.$$

Por conseguinte, no ponto $\left(-\frac{4}{3}\,;\ \frac{1}{3}\right)$ a função tem um mínimo que é igual a

$$z_{\substack{x=-\frac{4}{3}\\ y=\frac{1}{3}}}=-\frac{4}{3}\,.$$

Exemplo — 4. Estudar os máximos e mínimos da função

$$z=x^3+y^3-3xy.$$

Resolução — 1. Determinemos os pontos críticos, utilizando as condições necessárias para a existência dum extremo:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0, \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0. \end{array}\right\}$$

Obtemos os dois pontos críticos:

$$x_1=1, \quad y_1=1 \quad \text{e} \quad x_2=0, \quad y_2=0,$$

2. Calculemos as derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-3, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

3. Estudemos a natureza do primeiro ponto crítico:

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=1\\ y=1}}=6\,; \quad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_{\substack{x=1\\ y=1}}=-3\,; \quad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=1\\ y=1}}=6\,;$$

$$AC-B^2=36-9=27>0\,; \qquad A>0.$$

Por conseguinte, a função admite um mínimo no ponto (1, 1); o valor da função neste ponto é:

$$z_{\substack{x=1\\ y=1}}=-1.$$

4. Estudemos a natureza do segundo ponto crítico $M_2(0, 0)$:

$$A = 0; \quad B = -3; \quad C = 0;$$
$$AC - B^2 = -9 < 0.$$

Por conseguinte, o segundo ponto crítico não é, nem um mínimo nem um máximo (minimax).

Exemplo — 5. Determinar três números positivos, cuja soma é igual a um número positivo a e cujo produto é máximo.

Resolução — Designemos, respectivamente, estes três números por x, y, e $a - x - y$. O seu produto é, então, igual a

$$u = x \cdot y\,(a - x - y).$$

Por hipótese, $x > 0$, $y > 0$, $a - x - y > 0$, isto é, $x + y < a$, $u > 0$. Por conseguinte, x e y tomam valores pertencentes ao domínio limitado pelas rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$.

Calculemos as derivadas parciais da função u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\,(a - 2x - y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\,(a - 2y - x).$$

Igualando estas derivadas a zero, obtém-se o sistema de equações:

$$y\,(a - 2x - y) = 0; \qquad x\,(a - 2y - x) = 0.$$

Resolvendo este sistema, obtém-se os pontos críticos:

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 0, \qquad M_1(0, 0);$$
$$x_2 = 0, \qquad y_2 = a, \qquad M_2(0, a);$$
$$x_3 = a, \qquad y_3 = 0, \qquad M_3(a, 0);$$
$$x_4 = \frac{a}{3}, \qquad y_4 = \frac{a}{3}, \qquad M_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right).$$

Os três primeiros pontos estão situados sobre a fronteira e o último no interior do domínio. A função u é positiva no interior do domínio e anula-se sobre a fronteira; por conseguinte, a função u admite um máximo no ponto $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ (é o único extremo no interior do triângulo). O valor máximo do produto é, pois:

$$u_{\max} = \frac{a}{3}\,\frac{a}{3}\left(a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}.$$

Estudemos a natureza dos pontos críticos (servindo-nos das condições suficientes da existência dum extremo). Calculemos as derivadas parciais de segunda ordem da função u:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2y; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = a - 2x - 2y; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x.$$

No ponto $M_1(0, 0)$, temos $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$; $B = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = a$; $C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

$$AC - B^2 = -a^2 < 0.$$

Por conseguinte, no ponto M_1 não há nem máximo nem mínimo. No ponto M_2 (0, a), temos $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2a$; $B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -a$; $C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

$$AC - B^2 = -a^2 < 0.$$

Por conseguinte, no ponto M_2 não há nem máximo nem mínimo. No ponto $M_3 (a, 0)$, temos $A = 0$; $B = -a$: $C = -2a$;

$$AC - B^2 = -a^2 < 0.$$

No ponto M_3 não há, igualmente, nem máximo nem mínimo. Temos no ponto $M_4\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ $A = -\frac{2a}{3}$; $B = -\frac{a}{3}$; $C = -\frac{2a}{3}$;

$$AC - B^2 = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} > 0; \quad A < 0.$$

Por conseguinte, a função admite um máximo no ponto M_4.

Nota — A teoria dos máximos e dos mínimos das funções de várias variáveis está na base dum método para obter as fórmulas que permitem representar as dependências funcionais segundo os dados experimentais. Esta questão «Estabelecimento duma dependência funcional a partir dos dados experimentais pelo método dos mínimos quadrados» está exposta no Anexo, no fim do I volume.

§ 18. Máximos e mínimos das funções de várias variáveis submetidas a certas condições (máximos e mínimos ligados)

Muitas vezes o problema da determinação dos maiores e dos menores valores duma função resume-se na procura dos máximos e dos mínimos duma função de várias variáveis que não são independentes, mas ligadas entre si por certas condições suplementares (por exemplo, sujeitos a verificar certas equações).

Consideremos, por exemplo, o seguinte problema. Pede-se para fabricar uma caixa paralelipipédica de volume máximo com uma folha de chapa metálica de superfície $2a$.

Designemos, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura da caixa por x, y, z. O problema resume-se, por conseguinte, na procura do máximo da função

$$v = xyz,$$

em que x, y, z verificam a condição $2xy + 2xz + 2yz = 2a$.

Estamos, pois, em presença do problema da procura dos *extremos ligados* (*): as variáveis x, y, z *estão ligadas pela relação*

(*) Por oposição ao extremo usual que se chama também extremo livre.

$2xy + 2xz + 2yz = 2a$. Vamos considerar neste parágrafo os métodos de resolução dos problemas deste género.

Consideremos primeiramente o problema de um extremo ligado duma função de duas variáveis quando elas não estão ligadas entre si a não ser por uma só condição.

Seja calcular os máximos e os mínimos da função

$$u = f(x, y), \tag{1}$$

em que x e y estão ligados pela equação

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{2}$$

A condição (2) implica que *só uma* das variáveis x e y *é* independente, por exemplo. x, pois y é, então, determinado a partir da igualdade (2) como função de x. Se se resolve a equação (2) em relação a y, e se se substitui na igualdade (1) a expressão encontrada para y, u será função duma só variável x e o problema será assim reduzido ao estudo do máximo e do mínimo duma função duma só variável independente x.

Mas pode-se resolver o problema posto sem que seja necessário resolver a equação (2) em relação a x ou a y. A derivada de u em relação a x deve-se anular para os valores de x onde a função u é susceptível de admitir um máximo ou um mínimo.

Calculemos $\frac{du}{dx}$ a partir de (1), sabendo que y é uma função de x:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Por conseguinte, nos pontos de extremo

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

Obtém-se a igualdade (2):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{4}$$

Esta equação é satisfeita para todos os x e y que verificam a equação (2) (ver § 11, Cap. VIII).

Multipliquemos todos os termos da igualdade (4) por um coeficiente indeterminado λ e juntemo-los aos termos correspondentes da igualdade (3). Obtemos

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0. \tag{5}$$

Esta igualdade tem lugar para todos os pontos em que houver um extremo. Escolhamos λ de maneira que para os valores de x e y onde a função u apresenta um extremo, o segundo parêntesis da igualdade (5) se anule (*)

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

Mas, então, para estes valores de x e de y resulta da igualdade (5) que

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0.$$

Assim, nos pontos do extremo as três equações

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\\&\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\\&\varphi(x,\ y)=0\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

a três incógnitas x, y, λ são verificadas. A resolução destas equações dá-nos as incógnitas x, y, e λ que apenas desempenharam um papel auxiliar e de que já não teremos necessidade.

É claro que as equações (6) são as condições necessárias para a existência dum extremo ligado, isto é, em todo o ponto de extremo as equações (6) são verificadas. O recíproco não é verdadeiro porque a função pode não ter extremo ligado para os valores correspondentes de x, y e λ tirados das equações (6). É-se, pois levado a empreender um estudo detalhado da natureza do ponto crítico. Resolvendo problemas concretos, pode-se, por vezes, determinar a natureza do ponto crítico segundo o próprio carácter do problema. Notemos que os primeiros membros das equações (6) são as derivadas parciais em relação às variáveis x, y, λ da função

$$F(x,\ y,\ \lambda)=f(x,\ y)+\lambda\varphi(x,\ y). \tag{7}$$

(*) Para fixar ideias, suporemos que nos críticos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\neq 0.$$

Assim, para obter os valores de x e y que verificam a condição (2) para os quais a função $u = f(x, y)$ admite um máximo ou um mínimo ligado, é preciso formar a função auxiliar (7), igualar a zero as suas derivadas parciais em relação a x, y, λ e determinar as incógnitas x, y (bem como o factor auxiliar λ) das três equações (6) assim obtidas. Este método pode ser fàcilmente generalizado à determinação dos extremos ligados duma função dum número qualquer de variáveis.

Seja determinar os máximos e os mínimos da função $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sujeitas a verificar as m equações ($m < n$):

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Para encontrar os valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ susceptíveis de dar máximos ou mínimos ligados desta função, deve-se formar a função auxiliar

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \\ + \lambda_1\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_2\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) + \ldots \\ \ldots + \lambda_m\varphi_m(x_1, \ldots, x_n),$$

igualar a zero as suas derivadas parciais em relação a $x_1, \ldots, x_n$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0 \end{array}\right\} \quad (9)$$

e determinar $m + n$ equações (8) e (9) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e as incógnitas auxiliares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Tal como para uma função de duas variáveis, a questão de saber se aos valores encontrados das variáveis corresponde verdadeiramente um máximo ou um mínimo da função ou se esta última não admite extremo neste ponto fica sem resposta no caso geral. Esta questão será resolvida com o auxílio de considerações particulares decorrentes de cada problema concreto.

Exemplo — 1. Voltemos ao problema considerado no começo deste parágrafo: achar o máximo da função

$$v = xyz$$

se as variáveis x, y, z estão sujeitas a verificar a relação

$$xy + xz + yz - a = 0 \ (x > 0, \ y > 0, \ z > 0). \tag{10}$$

Formemos a função auxiliar

$$F(x, y, \lambda) = xyz + \lambda (xy + xz + yz - a).$$

Calculemos as suas derivadas parciais e igualemo-las a zero:

$$\left.\begin{array}{l} yz + \lambda (y+z) = 0, \\ xz + \lambda (x+z) = 0, \\ xy + \lambda (x+y) = 0. \end{array}\right\} \tag{11}$$

O problema reduz-se, pois, à resolução do sistema das quatro equações (10) e (11) a quatro incógnitas (x, y, z e λ). Para resolver este sistema de equações, multipliquemos a primeira equação de (11) por x, a segunda por y, a terceira por z e juntemos as expressões assim obtidas. Servindo-nos da equação (10), obtemos $\lambda = -\frac{3xyz}{2a}$. Substituamos este valor de λ na equação (11); temos:

$$yz\left[1 - \frac{3x}{2a}(y+z)\right] = 0,$$

$$xz\left[1 - \frac{3y}{2a}(x+z)\right] = 0,$$

$$xy\left[1 - \frac{3z}{2a}(x+y)\right] = 0.$$

Visto que x, y e z, segundo a natureza do problema, são diferentes de zero, deduz-se destas equações, que

$$\frac{3x}{2a}(y+z) = 1, \qquad \frac{3y}{2a}(x+z) = 1, \qquad \frac{3z}{2a}(x+y) = 1.$$

Das duas primeiras equações, obtemos $x = y$, da segunda e da terceira, $y = z$. Mas, então, resulta da equação (10), $x = y = z = \sqrt{\frac{a}{3}}$.

Obtivemos, assim, o único sistema de valores das variáveis x, y, e z, para os quais a função é susceptível de ter um máximo ou um mínimo.

Pode-se demonstrar que este ponto é, precisamente, um ponto máximo. Isto resulta, igualmente, de certas considerações geométricas (sendo as condições do problema tais, que o volume da caixa não possa ser infinitamente grande; deve ser, por conseguinte, máximo para certos valores das dimensões dos lados).

O volume da caixa é, pois, máximo quando ela tem a forma dum cubo de areata $\sqrt{\frac{a}{3}}$.

Exemplo — 2. Determinar o valor máximo da raíz índice n do produto dos números x_1, x_2, ..., x_n, se a soma destes números for igual a um número

dado a. Pode-se, pois, pôr o problema da maneira seguinte: pede-se para determinar o máximo da função $u = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$, se as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ forem sujeitas a verificar a relação

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a = 0 \qquad (12)$$
$$(x_1 > 0,\ x_2 > 0, \ldots, x_n > 0).$$

Formemos a função auxiliar

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \lambda (x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a).$$

Calculemos as derivadas parciais

$$F'_{x_1} = \frac{1}{n} \frac{x_2 x_3 \ldots x_n}{(x_1 \ldots x_n)^{\frac{n-1}{n}}} + \lambda = \frac{1}{n} \frac{u}{x_1} + \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad u = -n\lambda x_1,$$

$$F'_{x_2} = \frac{1}{n} \frac{u}{x_2} + \lambda = 0 \qquad \text{ou} \quad u = -n\lambda x_2,$$

. . . .

$$F'_{x_n} = \frac{1}{n} \frac{u}{x_n} + \lambda = 0 \qquad \text{ou} \quad u = -n\lambda x_n.$$

Resulta destas últimas igualdades:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n,$$

e em virtude da equação (12), obtemos

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}.$$

A natureza do problema dita-nos que neste ponto crítico a função $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ apresenta um máximo igual a $\frac{a}{n}$.

Por conseguinte, todo o sistema de números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que verificam a relação $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$, satisfaz a desigualdade

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{a}{n} \qquad (13)$$

$\left(\text{sendo } \frac{a}{n} \text{ o maior valor desta função}\right)$ Substituindo na desigualdade (13) a pela sua expressão tirada da igualdade (12), obtém-se:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}. \qquad (14)$$

Esta desigualdade tem lugar para todos os números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. O primeiro membro da desigualdade (14) chama-se *média geométrica* desses números. Assim, a média geométrica dum número finito de números positivos não é superior à média aritmética desses números.

§ 19. Pontos singulares duma curva

Emprega-se, igualmente, as derivadas parciais para o estudo das curvas.

Seja

$$F(x, y) = 0$$

a equação duma curva.

O valor do coeficiente angular da tangente à curva é dado pela fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

(ver § 11, Cap. VIII).

Se pelo menos uma das derivadas parciais $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ não se anula no ponto dado M (x, y) tomado sobre a curva, a quantidade $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{dx}{dy}$ é, então, bem determinada. A curva $F(x, y) = 0$, tem, pois, neste ponto, uma tangente bem determinada. Diz-se, então, em casos semelhantes, que $M(x, y)$ é um ponto *simples* da curva.

Se pelo contrário o ponto $M_0(x_0, y_0)$ é tal, que:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0,$$

o coeficiente angular da tangente é indeterminado.

Definição — Chama-se *ponto singular* duma curva $F(x, y) = 0$ ao ponto $M_0(x_0, y_0)$, onde as derivadas parciais $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ se anulam. Resulta da definição que os pontos singulares são definidos pelo sistema de equações

$$F = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

É evidente, que todas as curvas não têm, necessàriamente, pontos singulares. Por exemplo, para a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

temos, evidentemente,

$$F(x, y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1; \quad \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{b^2};$$

As derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ não se anulam a não ser no ponto $x=0$, $y=0$, que não pertencem à elipse. Por conseguinte, a elipse não tem pontos singulares.

Sem empreender um estudo detalhado do comportamento duma curva na vizinhança dos pontos singulares, limitar-nos-emos a considerar alguns exemplos de curvas que têm pontos singulares.

Exemplo — 1. Estudar os pontos singulares da curva

$$y^2 - x(x-a)^2 = 0 \qquad (a > 0).$$

Resolução — No caso dado $F(x, y) = y^2 - x(x-a)^2$ e, por consequência,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=(x-a)(a-3x); \quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y.$$

Resolvendo o sistema das três equações:

$$F(x, y)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,$$

obtemos:

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0.$$

O ponto $M_0(a, 0)$ é, por conseguinte, um ponto singular.

Estudemos o comportamento da curva na vizinhança do ponto singular e construamos esta curva.

Escrevamos esta equação sob a forma

$$y=\pm(x-a)\sqrt{x}.$$

Vê-se, desta fórmula, que a curva: 1) não é definida a não ser para $x \geqslant 0$; 2) é simétrica em relação ao eixo Ox; 3) corta o eixo Ox nos pontos $(0, 0)$ e $(a, 0)$. Este último ponto é um ponto singular.

Consideremos, primeiramente, a parte da curva correspondente aos valores positivos:

$$y=(x-a)\sqrt{x}.$$

Calculemos as derivadas de y de primeira e da segunda ordem em relação a x:

$$y'=\frac{3x-a}{2\sqrt{x}}, \quad y''=\frac{3x+a}{4x\sqrt{x}}.$$

Para $x=0$, tem-se $y'=\infty$. Por conseguinte, a curva é tangente ao eixo Oy na origem das coordenadas. Para $x=\frac{a}{3}$, tem-se $y'=0$, $y''>0$, isto é, que a função y apresenta um mínimo para $x=\frac{a}{3}$

$$y=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Sobre o segmento $0 < x < a$, tem-se $y < 0$; para $x > \frac{a}{3}$, $y' > 0$; quando $x \to \infty$, $y \to \infty$. Para $x = a$, $y' = \sqrt{a}$, isto é, o ramo da curva $y = +(x - a)\sqrt{x}$ tem por tangente no ponto singular $M_0(a, 0)$ a recta

$$y = \sqrt{a}(x - a).$$

O segundo ramo da curva $y = -(x - a)\sqrt{x}$ sendo simétrica da primeira em relação ao eixo Ox, a curva tem, por conseguinte, uma segunda tangente no ponto singular, definida pela equação

$$y = -\sqrt{a}(x - a).$$

A curva passa duas vezes pelo ponto singular. Um ponto que apresenta uma tal particularidade chama-se *ponto duplo*. A curva considerada está representada na figura 187.

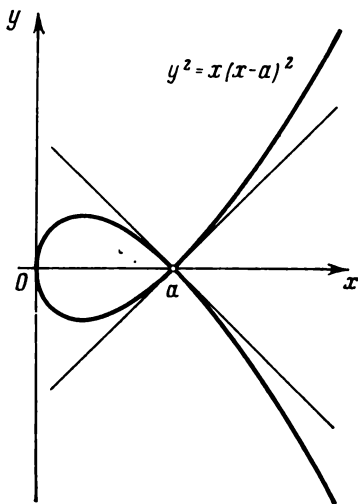
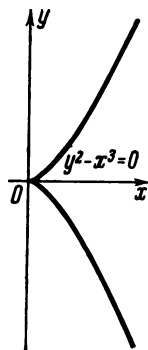



Fig. 187 Fig. 188

Exemplo — 2. Estudar os pontos singulares da curva (parábola semicúbica)

$$y^2 - x^3 = 0.$$

Resolução — Determina-se as coordenadas dos pontos singulares a partir do sistema de equações:

$$y^2 - x^3 = 0; \quad 3x^2 = 0; \quad 2y = 0.$$

Daí resulta que o ponto $M_0(0.\ 0)$ é um ponto singular.

Ponhamos a equação considerada sob a forma

$$y = \pm\sqrt{x^3}.$$

Para construir esta curva procedemos da maneira seguinte: estudamos primeiramente o ramo da curva correspondente aos valores positivos; o ramo correspondente ao sinal menos não exige um estudo particular, visto que, ele é simétrico do primeiro ramo em relação ao eixo Ox.

A função y apenas é definida para $x \geqslant 0$, ela é não negativa e cresce com x.

Calculemos as derivadas primeira e segunda da função $y = \sqrt{x^3}$.

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}; \qquad y'' = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Para $x = 0$, tem-se $y = 0$, $y' = 0$. Por conseguinte, o ramo considerado da curva tem por tangente na origem das coordenadas a recta $y = 0$. O segundo ramo da curva $y = -\sqrt{x^3}$ passa igualmente pela origem das coordenadas e tem também por tangente nesse ponto a recta $y = 0$. Por conseguinte, os dois ramos da curva passam pela origem das coordenadas, y têm uma mesma tangente e estão dispostas simètricamente dum e doutro lado desta tangente. Um ponto singular desta espécie chama-se *ponto de reversão de primeira espécie* (fig. 188).

Nota — Pode-se considerar a curva $y^2 - x^3 = 0$ como um caso limite da curva $y^2 - x(x-a)^2 = 0$ (considerado no exemplo 1), para $a \to 0$, isto é, quando o arco se contrai até ser reduzido a um só ponto.

Exemplo — 3. Estudar a curva

$$(y - x^2)^2 - x^5 = 0.$$

Resolução — Determinam-se os pontos singulares a partir do sistema de equações

$$4x(y - x^2) - 5x^4 = 0; \qquad 2(y - x^2) = 0.$$

Este sistema tem uma solução única: $x = 0$, $y = 0$. A origem das coordenadas é, por conseguinte, um ponto singular.

Ponhamos a equação considerada sob a forma

$$y = x^2 \pm \sqrt{x^5}.$$

Daí resulta que x é susceptível de tomar todos os valores compreendidos entre 0 e $+\infty$.

Calculemos as derivadas primeira e segunda:

$$y' = 2x \pm \frac{5}{2}\sqrt{x^3}; \qquad y'' = 2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{x}.$$

Estudemos, separadamente, os ramos da curva que correspondem respectivamente ao sinal mais e ao sinal menos do radical. Nos dois casos, para $x = 0$, temos $y = 0$, $y' = 0$. Por conseguinte, o eixo Ox é uma tangente para os dois ramos da curva.

Consideremos, primeiramente, o ramo

$$y = x^2 + \sqrt{x^5}.$$

Quando x cresce de 0 a ∞, y cresce de 0 a ∞.

O segundo ramo

$$y = x^2 - \sqrt{x^5}$$

corta o eixo Ox nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

A função $y = x^2 - \sqrt{x^5}$ apresenta um máximo para $x = \frac{16}{25}$. Para $x \to +\infty$, $y \to -\infty$.

Os dois ramos da curva passam pela origem das coordenadas; elas têm uma tangente comum e estão dispostas do mesmo lado da tangente

na vizinhança do ponto de tangência. Um tal ponto singular chama-se *ponto de reversão de segunda espécie*. O gráfico da função considerada está representado na figura 189.

Exemplo — 4. Estudar a curva

$$y^2 - x^4 + x^6 = 0.$$

Resolução — A origem das coordenadas é um ponto singular. Para estudar a variação da curva na vizinhança deste ponto singular ponhamos a equação da curva sob a forma

$$y = \pm x^2 \sqrt{1 - x^2}.$$

A curva é simétrica em relação aos eixos das coordenadas, visto que na equação da curva apenas entram potências pares das variáveis e, por

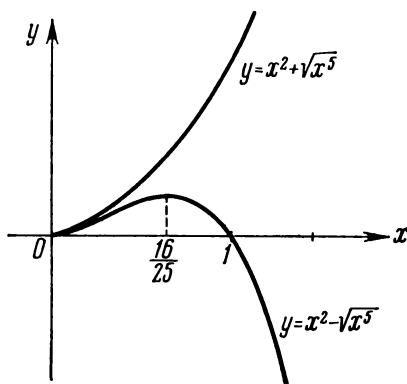



Fig. 189

conseguinte, basta estudar a curva para os valores positivos de x e y. Resulta desta última equação que x varia de 0 a 1, isto é, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Calculemos a derivada do ramo da curva cuja equação é $y = +x^2 \sqrt{1 - x^2}$:

$$y' = \frac{x(2 - 3x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Para $x = 0$, tem-se $y = 0$, $y' = 0$. A curva é, pois, tangente ao eixo Ox na origem das coordenadas. Para $x = 1$, $y = 0$, $y' = \infty$; por conseguinte, no ponto $(1, 0)$ a tangente à curva é paralela ao eixo Oy. Além disso, a função admite um máximo para $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (fig. 190).

Na origem (no ponto singular) os dois ramos da curva são tangentes. Um ponto singular deste género chama-se *ponto de tangência*.

Exemplo — 5. Estudar a curva

$$y^2 - x^2(x - 1) = 0.$$

Resolução — Os pontos singulares são determinados a partir do sistema de equações:

$$y^2 - x^2(x-1) = 0; \quad -3x^2 + 2x = 0, \quad 2y = 0.$$

Este sistema admite para solução $x = 0$, $y = 0$. O ponto (0, 0) é, por conseguinte, um ponto singular da curva. Ponhamos a equação da curva sob a forma

$$y = \pm x\sqrt{x-1}.$$

É evidente que x pode tomar todos os valores compreendidos entre 1 e ∞, bem como o valor zero (neste caso $y = 0$).

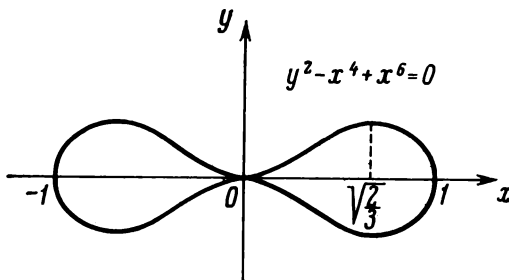
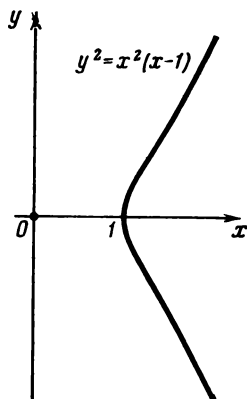



Fig. 190 Fig. 191

Estudemos o ramo da curva correspondente ao sinal mais do radical. Quando x cresce de 1 a ∞, y cresce de 0 a ∞. A derivada de y é

$$y' = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}.$$

Para $x = 1$, tem-se $y' = \infty$. A tangente à curva no ponto (1, 0) é, pois, paralela ao eixo Oy.

O segundo ramo da curva (correspondente ao sinal menos do radical) é simétrico ao primeiro em relação ao eixo Ox.

As coordenadas do ponto (0, 0) verificam a equação da curva, mas nenhum outro ponto da sua vizinhança pertencem à curva (fig. 191). Neste caso, chama-se a um ponto singular deste género *ponto isolado* da curva.

Exercícios

Calcular as derivadas parciais das funções seguintes:

1. $z = x^2 \operatorname{sen}^2 y$. Resp. $\frac{\partial z}{dx} = 2x \operatorname{sen}^2 y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \operatorname{sen}^2 2y$.

2. $z = x^{y^2}$. Resp. $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^{y^2} \cdot 2y \operatorname{Log} x$.

3. $u=e^{x^2+y^2+z^2}$. Resp. $\frac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=$ $=2ze^{x^2+y^2+z^2}$.

4. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Resp. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

5. $z=\text{arc tg}\,(xy)$. Resp. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{1+x^2y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{1+x^2y^2}$.

6. $z=\text{arc tg}\,\frac{y}{x}$. Resp. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$.

7. $z=\text{Log}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$. Resp. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

8. $u=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{z}{y}}$. Resp. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}-\frac{z}{y^2}e^{\frac{z}{y}}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{y}e^{\frac{z}{y}}$.

9. $z=\text{arc sen}\,(x+y)$. Resp. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}=\frac{\partial z}{\partial y}$.

10. $z=\text{arc tg}\,\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$. Resp. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{x^4-y^4}}$.

Calcular os diferenciais totais das funções seguintes:

11. $z=x^2+xy^2+\text{sen}\,y$. Resp. $dz=(2x+y^2)\,dx+(2xy+\cos y)\,dy$.

12. $z=\text{Log}\,(xy)$. Resp. $dz=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}$.

13. $z=e^{x^2+y^2}$. Resp. $dz=2e^{x^2+y^2}\cdot(x\,dx+y\,dy)$.

14. $u=\text{tg}\,(3x-y)+6^{y+z}$. Resp. $du=\frac{3\,dx}{\cos^2(3x-y)}+\left(-\frac{1}{\cos^2(3x-y)}+6^{y+z}\,\text{Log}\,6\right)dy+6^{y+z}\,\text{Log}\,6\,dz$.

15. $w=\text{arc sen}\,\frac{x}{y}$. Resp. $dw=\frac{y\,dx-x\,dy}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}$.

16. Calcular $f'_x(2, 3)$ e $f'_y(2, 3)$, se $f(x, y)=x^2+y^3$. Resp. $f'_x(2, 3)=4$, $f'_y(2, 3)=27$.

17. Calcular $df(x, y)$ para $x=1$, $y=0$; $dx=\frac{1}{2}$, $dy=\frac{1}{4}$, se $f(x, y)=$ $=\sqrt{x^2+y^2}$. Resp. $\frac{1}{2}$.

Determinar para pequenos valores absolutos das variáveis x, y, z uma fórmula aproximada para as expressões:

18. $\sqrt{\frac{1+x}{(1+y)(1+z)}}$. Resp. $1+\frac{1}{2}(x-y-z)$.

19. $\sqrt{\frac{1+x}{1+y+z}}$. Resp. $1+\frac{1}{2}(x-y-z)$.

20. Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, se $z=u+v^2$, $u=x^2+\operatorname{sen} y$, $v=\operatorname{Log}(x+y)$.
Resp. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2v\frac{1}{x+y}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\cos y+2v\frac{1}{x+y}$.

21. Calcular $\frac{dz}{dx}$, se $z=\sqrt{\frac{1+u}{1+v}}$, $u=-\cos x$; $v=\cos x$. Resp. $\frac{dz}{dx}=$ $=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$.

22. Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, se $z=e^{u-2v}$, $u=\operatorname{sen} x$, $v=x^3+y^2$. Resp. $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=e^{u-2v}(\cos x-6x^2)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{u-2v}(0-2\cdot 2y)=-4ye^{u-2v}$.

Calcular as derivadas totais das funções seguintes:

23. $z=\operatorname{arc\,sen}(u+v)$; $u=\operatorname{sen} x\cos\alpha$; $v=\cos x\operatorname{sen}\alpha$. Resp. $\frac{dz}{dx}=1$. si $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}$; $\frac{dz}{dx}=-1$, se $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x+\alpha<(2k+$ $+1)\pi+\frac{\pi}{2}$.

24. $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$; $y=a\operatorname{sen} x$; $z=\cos x$. Resp. $\frac{du}{dx}=e^{ax}\operatorname{sen} x$.

25. $z=\operatorname{Log}(1-x^4)$; $x=\sqrt{\operatorname{sen}\theta}$; $\frac{dz}{d\theta}=-2\operatorname{tg}\theta$.

Calcular as derivadas das funções implícitas de x dadas pelas equações:

26. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. Resp. $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$.

27. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Resp. $\frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$.

28. $y^x=x^y$. Resp. $\frac{dy}{dx}=\frac{yx^{y-1}-y^x\operatorname{Log} y}{xy^{x-1}-x^y\operatorname{Log} x}$.

29. $\operatorname{sen}(xy)-e^{xy}-x^2y=0$. Resp. $\frac{dy}{dx}=\frac{y[\cos(xy)-e^{xy}-2x]}{x[x+e^{xy}-\cos(xy)]}$.

30. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$. Resp. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=-\frac{c^2y}{b^2z}$.

31. $u-v\operatorname{tg} aw=0$; Calcular $\frac{\partial w}{\partial u}$ e $\frac{\partial w}{\partial v}$. Resp $\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\cos^2 aw}{av}$; $\frac{\partial w}{\partial v}=$ $=-\frac{\operatorname{sen} 2aw}{2av}$.

32. $z^2+\frac{2}{x}=\sqrt{y^2-z^2}$, mostrar que $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{z}$.

33. $\frac{z}{x}=F\left(\frac{y}{z}\right)$, mostrar que $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$, qualquer que seja a função derivável F.

Calcular as derivadas parciais da segunda ordem:

34. $z=x^3-4x^2y+5y^2$. Resp. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x-8y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=-8x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=10$.

35. $z=e^x \operatorname{Log} y+\operatorname{sen} y \operatorname{Log} x$. Resp. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x \operatorname{Log} y-\frac{\operatorname{sen} y}{x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{e^x}{y}+$
$+\frac{\cos y}{x}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{e^x}{y^2}-\operatorname{sen} y \operatorname{Log} x$.

36. Mostrar que se $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, então, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

37. Mostrar que se $z=\frac{x^2y^2}{x+y}$, então, $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial x}$.

38. Mostrar que se $z=\operatorname{Log}(x^2+y^2)$, então, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

39. Mostrar que se $z=\varphi(y+ax)+\psi(y-ax)$, então, $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$ quaisquer que sejam as funções arbitrárias φ e ψ deriváveis até à segunda ordem.

40. Calcular a derivada da função $z=3x^4-xy+y^3$ no ponto $M(1, 2)$ segundo uma direcção formando um ângulo de 60° com o eixo Ox. Resp. $5+\frac{11\sqrt{3}}{2}$.

41. Calcular a derivada da função $z=5x^2-3x-y-1$ no ponto $M(2, 1)$ segundo a direcção da recta que une este ponto ao ponto $N(5, 5)$. Resp. 9,4.

42. Calcular a derivada da função $f(x, y)$ segundo as direcções: 1) da bissectriz do ângulo das coordenadas Oxy. Resp. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)$; 2) do eixo dos x negativos. Resp. $-\frac{\partial f}{\partial x}$.

43. $f(x, y)=x^3+3x^2+4xy+y^2$. Mostrar que no ponto $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ a derivada é igual a zero segundo qualquer direcção («função estacionária»).

44. Determinar entre os triângulos que têm um mesmo perímetro $2p$ aquele cuja superfície é maior. Resp. O triângulo equilátero.

45. Determinar entre os paralelepípedos rectângulos de dada área S aquele cujo volume é maior. Resp. O cubo de aresta $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

46. Calcular a distância entre duas rectas do espaço de equações

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1},\quad \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}.\ \text{Resp.}\ \frac{\sqrt{2}}{2},$$

Estudar o máximo e o mínimo das funções

47. $z=x^3y^2(a-x-y)$. Resp. z é máximo para $x=\frac{a}{2}$; $y=\frac{a}{3}$.

48. $z=x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Resp. z é mínimo para $x=y=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

49. $z = \text{sen}\, x + \text{sen}\, y + \text{sen}\,(x+y)$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2};\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$; Resp. z é máximo para $x = y = \frac{\pi}{3}$.

50. $z = \text{sen}\, x\ \text{sen}\, y\ \text{sen}\,(x+y)$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi;\quad 0 \leqslant y \leqslant \pi)$. Resp. z é máximo para $x = y = \frac{\pi}{3}$.

Obter os pontos singulares das seguintes curvas, estudar a natureza desses pontos singulares e formar a equação das tangentes nesses pontos:

51. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Resp. $M_0\,(0,\ 0)$ é um ponto múltiplo; equações das tangentes: $x = 0$, $y = 0$.

52. $a^4 y^2 = x^4\,(a^2 - x^2)$. Resp. A origem é um ponto de tangência. Tangente dupla $y^2 = 0$.

53. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. Resp. $M_0\,(0,\ 0)$ é um ponto de reversão de primeira espécie; $y^2 = 0$ é a equação da tangente.

54. $y^2 = x^2\,(9 - x^2)$. Resp. $M_0\,(0,\ 0)$ é um ponto múltiplo; equações das tangentes; $y = \pm 3x$.

55. $x^4 - 2ax^2y - axy^2 + a^2x^2 = 0$. Resp. $M_0\,(0,\ 0)$ é um ponto de reversão de segunda espécie; $y^2 = 0$ é a equação da tangente dupla.

56. $y^2\,(a^2 + x^2) = x^2\,(a^2 - x^2)$. Resp. $M_0\,(0,\ 0)$ é um ponto múltiplo; equações das tangentes: $y = \pm x$.

57. $b^2x^2 + a^2y^2 = x^2y^2$. Resp. $M_0\,(0,\ 0)$ é um ponto isolado.

58. Mostrar que a origem das coordenadas é um ponto terminal para a curva $y = x \operatorname{Log} x$ e que neste ponto o eixo Oy é tangente à curva.

59. Mostrar que a origem das coordenadas é um ponto múltiplo da curva $y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$. As tangentes neste ponto são: à direita $y = 0$; à esquerda $y = x$.

Capítulo IX

APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL NA GEOMETRIA DO ESPAÇO

§ 1. Equação duma curva no espaço

Consideremos o vector $\overline{OA} = \boldsymbol{r}$ unindo a origem das coordenadas a um ponto variável $A(x, y, z)$ (fig. 192). Este vector chama-se *raio vector*.

Exprimamos este vector com o auxílio das suas projecções sobre os eixos coordenados:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \quad (1)$$

Suponhamos que as projecções do vector $\boldsymbol{r}$ são funções dum certo parâmetro t:

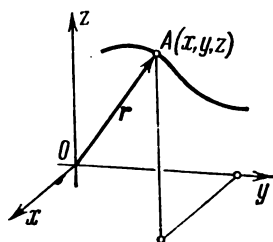
$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \chi(t). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Fig. 192

A fórmula (1) pode ser, então, posta sob a forma

$$\boldsymbol{r} = \varphi(t)\boldsymbol{i} + \psi(t)\boldsymbol{j} + \chi(t)\boldsymbol{k} \quad (1')$$

ou

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \quad (1'')$$

Quando t varia, as coordenadas x, y, z variam e o ponto A, extremidade do raio vector $\boldsymbol{r}$, descreve no espaço uma determinada curva que se chama *odografo* do vector $= \boldsymbol{r}(t)$. As equações (1') e (1'') chamam-se *equações vectoriais* duma curva no espaço ou *curva empenada*. As equações (2) chamam-se *equações paramétricas* duma curva empenada. A cada valor de t, estas equações fazem corresponder valores bem determinados das coordenadas x, y, z dum certo ponto da curva.

Nota — Pode-se igualmente definir uma curva empenada como sendo o lugar geométrico dos pontos de intersecção de duas superfícies. A curva pode, pois, ser definida pelas duas equações destas superfícies:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) &= 0, \\ \Phi_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Por exemplo, as equações

$$x^2+y^2+z^2=4, \quad z=1$$

são as equações dum círculo no espaço, sendo esse círculo definido como a intersecção duma esfera e dum plano (fig. 193).

Uma curva empenada pode, então, ser expressa quer pelas equações paramétricas (2), quer pelas duas equações das superfícies (3).

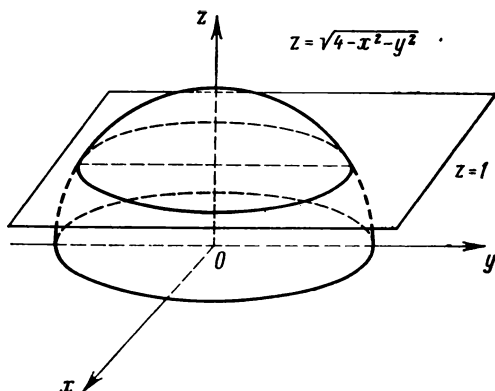



Fig. 193

Passa-se das curvas paramétricas às curvas expressas pela intersecção de duas superfícies eliminando o parâmetro t das equações (2): obtém-se, então, duas equações ligando x, y e z. Inversamente, se se põe $x = \varphi(t)$ (em que $\varphi(t)$ é uma função arbitrária) e se se exprime y e z em função de t a partir das equações

$$\Phi_1[\varphi(t), y, z]=0, \quad \Phi_2[\varphi(t), y, z]=0,$$

efectua-se a passagem das curvas expressas pela intersecção de superfícies às curvas definidas paramètricamente.

Exemplo — 1. Sejam

$$x = 4t - 1, \quad y = 3t, \quad z = t + 2$$

as equações paramétricas duma recta. Eliminando o parâmetro t, deduzimos as equações de dois planos. Por exemplo, subtraindo sucessivamente da primeira equação a segunda e a terceira, tem-se $x - y - z = -3$. Subtraindo da primeira a terceira, multiplicada prèviamente por quatro, tem-se $x - 4z = -9$. A recta dada é, pois, a curva definida pela intersecção dos dois planos

$$x - y - z + 3 = 0 \quad \text{e} \quad x - 4z + 9 = 0.$$

Exemplo — 2. Consideremos um cilindro recto de revolução de raio a, cujo eixo coincide com o eixo Oz (fig. 194). Enrolemos à volta do cilindro um triângulo rectângulo flexível C_1AC, de modo que o vértice A do triângulo

coincide com o ponto de encontro da geratriz do cilindro e do eixo Ox, e que o lado AC_1 se enrola sobre a secção deste cilindro situado no plano Oxy. A hipotenusa determina, então, sobre o cilindro uma curva chamada *hélice*.

Designemos por x, y, z as coordenadas dum ponto variável M da hélice e por t o ângulo AOP (ver fig. 194). Então,

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = PM = AP \operatorname{tg} \theta,$$

em que θ designa o ângulo agudo do triângulo C_1AC. Notemos que $\overset{\frown}{AP} = at$, porque $\overset{\frown}{AP}$ é o arco de circunferência de raio a correspondente ao ângulo ao centro t. Designando $\operatorname{tg} \theta$ por m, obtém-se as equações paramétricas da hélice

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad z = amt$$

(em que t é o parâmetro), ou sob a forma vectorial

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} a \cos t + \boldsymbol{j} a \operatorname{sen} t + \boldsymbol{k}\, amt.$$

Elimina-se o parâmetro t das equações paramétricas da hélice, elevando as duas primeiras equações ao quadrado e, juntando-as, obtém-se $x^2 + y^2 = a^2$.

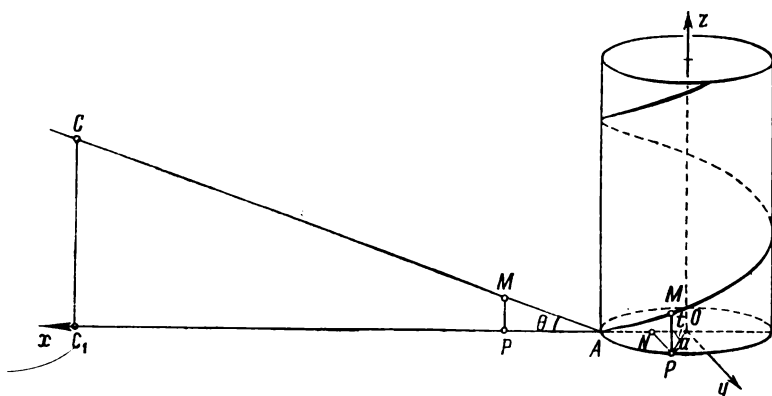



Fig. 194

É precisamente a equação do cilindro sobre o qual está traçada a hélice. Em seguida, dividindo termo a termo a segunda equação pela primeira e substituindo na relação obtida t pela sua expressão tirada da terceira equação, obtém-se a equação duma outra superfície sobre a qual está traçada a hélice:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{am}.$$

Ela chama-se *helicóide* com plano director. Pode-se considerá-la como gerada por uma semi-recta paralela ao plano Oxy de extremidade, situada sobre o eixo Oz, quando esta semi-recta gira com uma velocidade angular constante em volta do eixo Oz e que ela se desloque para cima com uma velocidade constante, de modo que a sua extremidade permaneça constantemente sobre o eixo Oz. A hélice é definida pela intercepção do cilindro e da superfície helicoidal. Eis porque, se pode defini-la pelas duas equações:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{am}.$$

§ 2. Limite e derivada duma função vectorial duma variável escalar independente. Equação da tangente a uma curva. Equação do plano normal

Voltemos às fórmulas (1') e (1'') do precedente parágrafo:

$$\boldsymbol{r} = \varphi(t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t)\,\boldsymbol{j} + \chi(t)\,\boldsymbol{k}$$

ou

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

Em geral, quando t varia, a grandeza e a direcção do vector $\boldsymbol{r}$

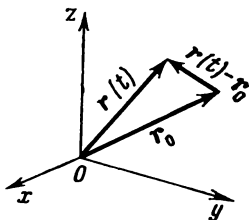
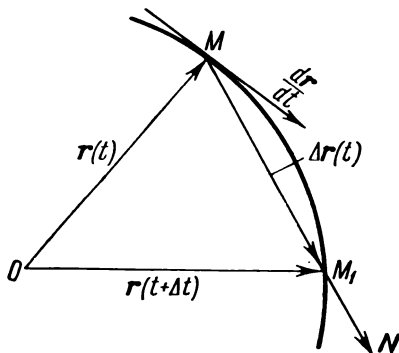



Fig. 195 Fig. 196

variam igualmente. Diz-se, então, que $\boldsymbol{r}$ é uma *função vectorial* da variável escalar independente t. Suponhamos que

$$\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = \varphi_0, \qquad \lim_{t\to t_0} \psi(t) = \psi_0, \qquad \lim_{t\to t_0} \chi(t) = \chi_0.$$

Diz-se, então, que o vector $\boldsymbol{r}_0 = \varphi_0\boldsymbol{i} + \psi_0\boldsymbol{j} + \chi_0\boldsymbol{k}$ é o limite do vector $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ e escreve-se, (fig. 195):

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0.$$

Daí resulta as igualdades evidentes:

$$\lim_{t\to t_0} |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0| =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \sqrt{[\varphi(t) - \varphi_0]^2 + [\psi(t) - \psi_0]^2 + [\chi(t) - \chi_0]^2} = 0\,.$$

e

$$\lim_{t\to t_0} |\boldsymbol{r}(t)| = |\boldsymbol{r}_0|.$$

Passemos agora à noção de derivada duma função vectorial duma variável escalar independente

$$\boldsymbol{r}(t) = \varphi(t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t)\,\boldsymbol{j} + \chi(t)\,\boldsymbol{k}, \tag{1}$$

supondo que a origem do vector $\boldsymbol{r}(t)$ coincide com a origem das coordenadas. Sabemos que a equação (1) é a equação vectorial duma curva empenada.

Escolhamos um valor de t que corresponde a um determinado ponto M da curva e dêmos a t um crescimento Δt; temos, então, o vector

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t) = \varphi(t+\Delta t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t+\Delta t)\,\boldsymbol{j} + \chi(t+\Delta t)\,\boldsymbol{k},$$

que determina sobre a curva um ponto M_1 (fig. 169). Calculemos o o crescimento do vector

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) = [\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)]\,\boldsymbol{i} +$$
$$+ [\psi(t+\Delta t) - \psi(t)]\,\boldsymbol{j} + [\chi(t+\Delta t) - \chi(t)]\,\boldsymbol{k}.$$

Este crescimento está representado na figura 196 pelo vector $\overline{MM_1} = \Delta\boldsymbol{r}(t)$, em que $\overline{OM} = \boldsymbol{r}(t)$, $\overline{OM_1} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ Consideremos o quociente $\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$ do crescimento da função vectorial pelo crescimento escalar independente; é, evidentemente, um vector colinear ao vector $\Delta\boldsymbol{r}(t)$ visto que se obtém multiplicando $\Delta\boldsymbol{r}(t)$ pelo factor escalar $\frac{1}{\Delta t}$.

Podemos pôr este vector sob a forma:

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}\,\boldsymbol{i} + \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\Delta t}\,\boldsymbol{j} +$$
$$+ \frac{\chi(t+\Delta t) - \chi(t)}{\Delta t}\,\boldsymbol{k}.$$

Se as derivadas das funções $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ existem para o valor escolhido de t, os coeficientes de $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ tenderão, respectivamente, para $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ quando $\Delta t \to 0$.

Por conseguinte, neste caso o limite $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ existe quando $\Delta t \to 0$ e é igual ao vector $\varphi'(t)\,\boldsymbol{i} + \psi'(t)\,\boldsymbol{j} + \chi'(t)\,\boldsymbol{k}$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \varphi'(t)\,\boldsymbol{i} + \psi'(t)\,\boldsymbol{j} + \chi'(t)\,\boldsymbol{k}.$$

Chama-se ao vector definido por esta última igualdade *derivada* do vector $\boldsymbol{r}(t)$ em relação à variável escalar t. Designa-se a derivada pelo símbolo $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ ou $\boldsymbol{r}'$.

Assim,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}' = \varphi'(t)\,\boldsymbol{i} + \psi'(t)\,\boldsymbol{j} + \chi'(t)\,\boldsymbol{k} \tag{2}$$

ou

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}. \tag{2'}$$

Vejamos qual é a direcção do vector $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$.

Quando $\Delta t \to 0$, o ponto M_1 tende para o ponto M; a direcção da secante MM_1 coincide no limite com a da tangente. Por consequência, o vector derivado $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ está orientado segundo a tangente à curva no ponto M. O comprimento do vector $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ é dado pela fórmula (*)

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}. \tag{3}$$

Os resultados obtidos permitem escrever fàcilmente a equação da tangente à curva

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

no ponto $M(x, y, z)$; basta recordar-se que $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$.

A equação da recta que passa pelo ponto $M(x, y, z)$ é

$$\frac{X - x}{m} = \frac{Y - y}{n} = \frac{Z - z}{p}$$

em que X, Y, Z são as coordenadas do ponto variável da recta e m, n, p quantidades proporcionais aos cossenos directores desta recta (isto é, às projecções do vector unitário da recta).

(*) Suporemos que nos pontos considerados $\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right] \neq 0$.

Por outro lado, estabelecemos que o vector

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$$

está orientado segundo a tangente. Eis porque as projecções deste vector são números proporcionais aos cossenos directores da tangente e, por conseguinte, aos números m, n, p. A equação da tangente será, então,

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Exemplo — 1. Escrever a equação da tangente à hélice

$$x=a\cos t,\quad y=a\ \mathrm{sen}\ t,\quad z=amt$$

para t qualquer e para $t=\frac{\pi}{4}$.

Resolução.

$$\frac{dx}{dt}=-a\ \mathrm{sen}\ t,\quad \frac{dy}{dt}=a\cos t,\quad \frac{dz}{dt}=am.$$

Temos, segundo a fórmula (4):

$$\frac{X-a\cos t}{-a\ \mathrm{sen}\ t}=\frac{Y-a\ \mathrm{sen}\ t}{a\cos t}=\frac{Z-amt}{am}.$$

Em particular, encontramos para $t=\frac{\pi}{4}$

$$\frac{X-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{Y-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{Z-am\frac{\pi}{4}}{am}.$$

Do mesmo modo que para uma curva plana, chama-se *normal* a uma curva empenada num dado ponto, à recta perpendicular à tangente e que passa pelo ponto de tangência. Existe, evidentemente, uma infinidade de normais em cada ponto duma curva empenada. Todas estas normais estão situadas no plano perpendicular à tangente à curva. Chama-se a este plano *plano normal*.

Deduzimos a equação do plano normal partindo da sua definição no que respeita ao plano perpendicular à tangente (4):

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0. \tag{5}$$

Exemplo — 2. Formar a equação do plano normal à hélice no ponto correspondente ao valor $t = \frac{\pi}{4}$ do parâmetro.

Resolução — Utilizando os resultados do exemplo (1) e a fórmula (5), tem-se:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(X - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(Y - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + m\left(Z - am\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Estabeleçamos agora a equação da tangente e do plano normal a uma curva empenada, no caso duma curva expressa pelas equações:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \quad \Phi_2(x, y, z) = 0. \tag{6}$$

Exprimamos as coordenadas x, y, z desta curva em função dum parâmetro arbitrário t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \tag{7}$$

Suporemos que $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ são funções deriváveis de t.

Substituindo na equação (6) as expressões de x, y, z em função de t para os pontos da curva, obtemos duas identidades em t:

$$\Phi_1[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = 0, \tag{8a}$$

$$\Phi_2[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = 0. \tag{8b}$$

Derivando as identidades (8a) e (8b) em relação a t, obtemos:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0, \\ &\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Resulta destas equações que:

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}}; \quad \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}}. \tag{10}$$

Suposemos, aqui, que a expressão

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} \neq 0,$$

mas pode-se demonstrar que as fórmulas definitivas (11) e (12) (ver mais abaixo) são igualmente válidas no caso em que esta expressão é igual à zero, e que pelo menos um dos determinantes que figuram nestas fórmulas é diferente de zero.

Resulta desta igualdade (10):

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}}=\frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}}$$

Por conseguinte, podemos, em virtude da fórmula (4), pôr a equação da tangente sob a forma

$$\frac{X-x}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}}$$

ou, servindo-nos dos determinantes,

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}&\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}&\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}&\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}&\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}&\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}&\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}}. \quad (11)$$

A equação do plano normal é, então,

$$(X-x)\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}&\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}&\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix}+(Y-y)\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}&\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}&\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\end{vmatrix}+(Z-z)\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}&\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}&\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}=0. \quad (12)$$

Estas fórmulas são válidas quando pelo menos um dos determinantes é diferente de zero. Se num ponto da curva os três determinantes

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}&\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\\\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}&\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}&\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\\\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}&\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}&\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\\\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}&\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\end{vmatrix}$$

se anulam simultânamente, o ponto considerado chama-se *ponto singular* da curva empenada. A curva pode não ter tangente neste ponto, do mesmo como nos pontos singulares duma curva plana (ver § 19, Cap. VIII).

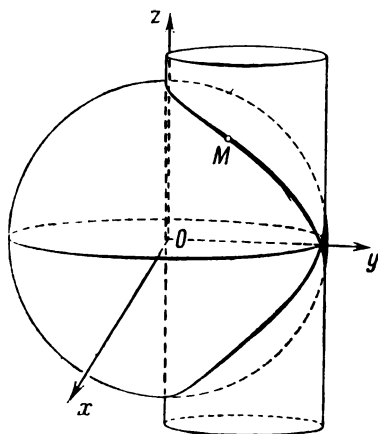



Fig. 197

Exemplo — 3. Achar a equação da tangente e do plano normal à curva definida pela intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$ e do cilindro $x^2 + y^2 = 2ry$ no ponto $M(r, r, r\sqrt{2})$ (fig. 197).

Resolução.

$$\Phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2,$$

$$\Phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2ry,$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 2z,$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 2y - 2r, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0.$$

Os valores das derivadas no ponto M são, respectivamente:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = 2r, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 2r, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 2r\sqrt{2}.$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 2r, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0.$$

A equação da tangente é:

$$\frac{X - r}{0} = \frac{Y - r}{\sqrt{2}} = \frac{Z - r\sqrt{2}}{-1}.$$

A equação do plano normal é:

$$\sqrt{2}(Y - r) - (Z - r\sqrt{2}) = 0.$$

§ 3. Regras de derivação dos vectores *(funções vectoriais)*

Definimos a derivada do vector

$$\boldsymbol{r}(t) = \varphi(t)\,\boldsymbol{i} + \psi(t)\,\boldsymbol{j} + \chi(t)\,\boldsymbol{k} \tag{1}$$

pela relação

$$\boldsymbol{r}'(t) = \varphi'(t)\,\boldsymbol{i} + \psi'(t)\,\boldsymbol{j} + \chi'(t)\,\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Resulta imediatamente desta definição que as principais regras de derivação das funções são válidas igualmente para os vectores. Estabeleceremos aqui as fórmulas de derivação da soma e do produto escalar de vectores, e limitar-nos-emos a enunciar as outras fórmulas deixando ao leitor o cuidado de as demonstrar.

I. *A derivada da soma de vectores é igual à soma das derivadas desses vectores.*

Com efeito, sendo dados dois vectores

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1(t) = \varphi_1(t)\,\boldsymbol{i} + \psi_1(t)\,\boldsymbol{j} + \chi_1(t)\,\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{r}_2(t) = \varphi_2(t)\,\boldsymbol{i} + \psi_2(t)\,\boldsymbol{j} + \chi_2(t)\,\boldsymbol{k}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

a sua soma é igual a

$$\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t) = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]\,\boldsymbol{i} + $$
$$+ [\psi_1(t) + \psi_2(t)]\,\boldsymbol{j} + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]\,\boldsymbol{k}.$$

Por definição, a derivada do vector variável é:

$$\frac{d[\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t)]}{dt} = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]'\,\boldsymbol{i} +$$
$$+ [\psi_1(t) + \psi_2(t)]'\,\boldsymbol{j} + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]'\,\boldsymbol{k}$$

ou

$$\frac{d[\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t)]}{dt} = [\varphi_1'(t) + \varphi_2'(t)]\,\boldsymbol{i} + [\psi_1'(t) + \psi_2'(t)]\,\boldsymbol{j} +$$
$$+ [\chi_1'(t) + \chi_2'(t)]\,\boldsymbol{k} = [\varphi_1'(t)\,\boldsymbol{i} + \psi_1'(t)\,\boldsymbol{j} + \chi_1'(t)\,\boldsymbol{k}] + [\varphi_2'(t)\,\boldsymbol{i} +$$
$$+ \psi_2'(t)\,\boldsymbol{j} + \chi_2'(t)\,\boldsymbol{k}] = \boldsymbol{r}_1' + \boldsymbol{r}_2'.$$

Por conseguinte,

$$\frac{d[\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t)]}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}. \tag{I}$$

II. *A derivada do produto escalar de dois vectores é dada pela fórmula*

$$\frac{d(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}. \tag{II}$$

Com efeito, se os vectores $\boldsymbol{r}_1(t)$ e $\boldsymbol{r}_2(t)$ são definidos pelas fórmulas (3), o seu produto escalar é igual a

$$\boldsymbol{r}_1(t)\,\boldsymbol{r}_2(t) = \varphi_1\varphi_2 + \psi_1\psi_2 + \chi_1\chi_2.$$

Eis porque

$$\frac{d(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)}{dt} = \varphi_1'\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2' + \psi_1'\psi_2 + \psi_1\psi_2' + \chi_1'\chi_2 + \chi_1\chi_2' =$$

$$= (\varphi_1'\varphi_2 + \psi_1'\psi_2 + \chi_1'\chi_2) + (\varphi_1\varphi_2' + \psi_1\psi_2' + \chi_1\chi_2') =$$

$$= (\varphi_1'\boldsymbol{i} + \psi_1'\boldsymbol{j} + \chi_1'\boldsymbol{k})(\varphi_2\boldsymbol{i} + \psi_2\boldsymbol{j} + \chi_2\boldsymbol{k}) +$$

$$+ (\varphi_1\boldsymbol{i} + \psi_1\boldsymbol{j} + \chi_1\boldsymbol{k})(\varphi_2'\boldsymbol{i} + \psi_2'\boldsymbol{j} + \chi_2'\boldsymbol{k}) = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}.$$

O teorema está demonstrado.

Deduzimos da fórmula (II) um corolário duma grande importância.

Corolário — *A derivada do vector unitário* e *(isto é, tal que* $|e| = 1$*) é perpendicular a este vector.*

Demonstração — Se e é um vector unitário, então,

$$ee = 1.$$

Derivemos, os dois membros desta igualdade, em relação a t:

$$e\frac{de}{dt} + \frac{de}{dt}e = 0$$

ou

$$2e\frac{de}{dt} = 0.$$

Logo, o produto escalar

$$e\frac{de}{dt} = 0;$$

isto significa, justamente, que o vector $\frac{de}{d}$ é perpendicular ao vector e.

III. *Pode-se tirar um factor constante debaixo do sinal de derivação:*

$$\frac{da\boldsymbol{r}(t)}{dt} = a\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = a\boldsymbol{r}'(t). \qquad \text{(III)}$$

IV. *A derivada do produto vectorial dos vectores* $\boldsymbol{r}_1$ *e* $\boldsymbol{r}_2$ *é definida pela fórmula*

$$\frac{d[\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2]}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \times \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}. \qquad \text{(IV)}$$

§ 4. Derivadas, primeira e segunda, dum vector em relação ao comprimento do arco. Curvatura da curva. Normal principal

O comprimento do arco (*) duma curva empenada $\overset{\frown}{M_0A} = s$ é definida da mesma maneira que para uma curva plana (fig. 198). O comprimento do arco s varia quando o ponto variável A (x, y, z) se desloca ao longo da curva; inversamente, quando s varia, as coordenadas x, y, z do ponto variável A da curva, variam.

Por conseguinte, podem-se considerar as coordenadas x, y, z do ponto variável A da curva, como funções do comprimento do arco s:

$$x = \varphi(s), \qquad y = \psi(s), \qquad z = \chi(s).$$

Nestas equações paramétricas, o parâmetro é o comprimento do arco s.

O vector $\overline{OA} = \boldsymbol{r}$ exprime-se da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{r} = \varphi(s)\boldsymbol{i} + \psi(s)\boldsymbol{j} + \chi(s)\boldsymbol{k}$$

ou

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s), \qquad (1)$$

Fig. 198

isto é, o vector $\boldsymbol{r}$ é uma função do comprimento do arco s.

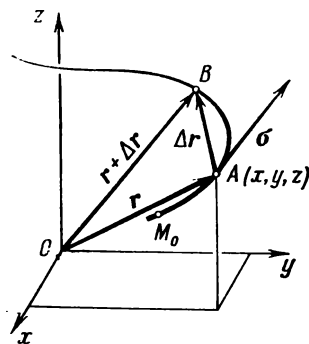
Elucidemos a significação geométrica da derivada $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$.

Resulta da figura 198 as igualdades:

$$\overset{\frown}{M_0A} = s, \quad \overset{\frown}{AB} = \Delta s, \quad \overset{\frown}{M_0B} = s + \Delta s,$$

$$\overline{OA} = \boldsymbol{r}(s), \quad \overline{OB} = \boldsymbol{r}(s + \Delta s),$$

$$\overline{AB} = \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s + \Delta s) - \boldsymbol{r}(s),$$

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overset{\frown}{AB}}$$

(*) Ver, definição do comprimento do arco duma curva plana, § 1, Cap. VI e § 3, Cap. XII.

Vimos, no § 2, que o vector $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}$ é dirigido segundo a tangente à curva no ponto A no sentido dos s crescentes. Por outro lado, temos a igualdade $\lim \left| \frac{\overline{AB}}{\overset{\frown}{AB}} \right| = 1$ (o limite do quociente do comprimento da corda e do comprimento do arco subtendido (*). Por conseguinte, $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ é um vector *unitário* dirigido segundo a tangente. Designemo-lo por σ:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \sigma. \tag{2}$$

Se o vector $\boldsymbol{r}$ é dado pelas suas projecções:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

então,

$$\sigma = \frac{dx}{ds}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{ds}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{ds}\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

em que

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1.$$

Consideremos, em seguida, a derivada *segunda* $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$ da função vectorial $\boldsymbol{r}$, isto é, a derivada de $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$, e demos a significação geométrica desta derivada segunda.

Resulta da fórmula (2), que

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right] = \frac{d\sigma}{ds}.$$

Por conseguinte, devemos calcular $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$.

Segundo a figura 199, $AB = \Delta s$, $\overline{AL} = \sigma$, $\overline{BK} = \sigma + \Delta\sigma$. Tracemos do ponto B o vector $\overline{BL_1} = \sigma$. Resulta do triângulo BKL_1:

$$\overline{BK} = \overline{BL_1} + \overline{L_1K}$$

(*) Demonstrámos esta igualdade para as curvas planas no § 1, Cap. VI. Ela é igualmente verdadeira para as curvas empenadas $\boldsymbol{r}(t) = \varphi(t)\boldsymbol{i} + \psi(t)\boldsymbol{j} + \chi(t)\boldsymbol{k}$, se as derivadas das funções $\varphi(t)$, $\psi(t)$ e $\chi(t)$ forem contínuas e não se anulem simultâneamente.

$$\sigma + \Delta\sigma = \sigma + \overline{L_1K}.$$

Por conseguinte, $L_1K = \Delta\sigma$. Visto que o comprimento do vector é constante,

$$|\sigma| = |\sigma + \Delta\sigma|;$$

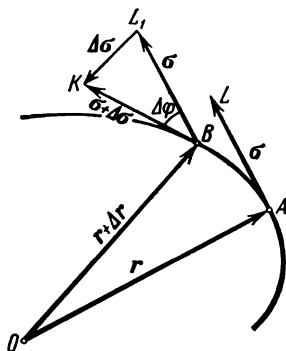
resulta que o triângulo BKL_1 é isósceles. O ângulo $\Delta\varphi$ no vértice deste triângulo é o ângulo de rotação da tangente à curva quando se passa do ponto A ao ponto B. Corresponde, pois, ao crescimento do comprimento do arco Δs. Resulta do triângulo BKL_1:

Fig. 199

$$L_1K = |\Delta\sigma| = 2|\sigma|\left|\text{sen}\,\frac{\Delta\varphi}{2}\right| = 2\left|\text{sen}\,\frac{\Delta\varphi}{2}\right|$$

(pois $|\sigma| = 1$).

Dividamos ambos os membros da igualdade por Δs:

$$\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right| = 2\left|\frac{\text{sen}\,\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\text{sen}\,\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right|\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Passemos ao limite nos dois membros desta igualdade, fazendo tender Δs para zero. À esquerda, obtemos:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\sigma}{ds}\right|.$$

Além disso,

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\text{sen}\,\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right| = 1,$$

visto que consideramos curvas para as quais o limite $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ existe e que, por conseguinte, $\Delta\varphi \to 0$ quando $\Delta s \to 0$. Assim, temos, depois da passagem ao limite,

$$\left|\frac{d\sigma}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|. \tag{4}$$

Chama-se *curvatura média* do arco AB da curva considerada ao quociente do ângulo de rotação $\Delta\varphi$ da tangente, quando se passa do ponto A ao ponto B, ao valor absoluto do comprimento Δs do arco AB:

$$\text{curvatura média} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

O limite da curvatura média quando $\Delta s \to 0$ chama-se *curvatura* da curva no ponto A e designa-se pela letra K:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Mas, então, resulta da igualdade (4) que $\left|\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}\right| = K$, isto é, o comprimento da derivada em relação ao comprimento do arco do vector unitário (*) da tangente é igual à curvatura da curva neste ponto. O vector $\boldsymbol{\sigma}$ sendo um vector unitário, a derivada $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$ é-lhe perpendicular (ver § 3, Cap. IX, Corolário).

Assim, o vector $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$ é dirigido, segundo a perpendicular ao vector da tangente, o seu comprimento é igual à curvatura nesse ponto.

Definição — Chama-se *normal principal* à curva, num dado ponto, a uma recta que coincide com o suporte do vector $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$. Designa-se por $\boldsymbol{n}$ vector unitário desta direcção.

O comprimento do vector $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}$ é igual à curvatura K da curva, por conseguinte,

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = K\boldsymbol{n}.$$

A quantidade $\frac{1}{K}$ chama-se *raio de curvatura* desta curva no ponto dado, e designa-se-la por R, isto é, $\frac{1}{K} = R$. Pode-se, então, escrever:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = \frac{\boldsymbol{n}}{R}. \tag{5}$$

(*) Recordemos que a derivada dum vector é ainda um vector, de maneira que tem cabimento o considerar-se o comprimento desta derivada.

Resulta desta fórmula:

$$\frac{1}{R^2}=\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right)^2. \tag{6}$$

Mas

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\frac{d^2x}{ds^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2y}{ds^2}\boldsymbol{j}+\frac{d^2z}{ds^2}\boldsymbol{k}.$$

Por conseguinte,

$$\frac{1}{R}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{6'}$$

A fórmula (6′) permite calcular a curvatura num ponto qualquer duma dada curva pelas suas equações paramétricas, cujo parâmetro é o comprimento do arco s (isto é, quando o raio vector do ponto variável desta curva é uma função do comprimento do arco).

Consideremos o caso em que o raio vector $\boldsymbol{r}$ é função dum parâmetro qualquer t:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t).$$

Neste caso, consideraremos s como uma função do parâmetro t. O cálculo da curvatura é, então, efectuado da seguinte maneira:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}. \tag{7}$$

Como

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|=1\ ^{*)},$$

então,

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{8}$$

Derivemos os dois membros desta igualdade e simplifiquemos por 2; temos

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{9}$$

(*) Esta igualdade resulta de que $\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{|\Delta s|}$. Mas, $\Delta\boldsymbol{r}$ é a corda que subtende o arco de comprimento Δs. Eis porque $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}$ tende para 1, quando $\Delta s\to 0$.

Resulta, da fórmula (7):

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,\frac{1}{\dfrac{ds}{dt}}.$$

Derivemos em relação a s os dois membros desta igualdade:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\,\frac{1}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2}-\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,\frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3};$$

Substituindo a expressão encontrada por $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$ na fórmula (6), temos:

$$\frac{1}{R^2}=\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\,\frac{1}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2}-\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,\frac{\dfrac{d^2s}{dt^2}}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3}\right]^2=$$

$$=\frac{\left(\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)^2\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2-2\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\,\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,\dfrac{ds}{dt}\,\dfrac{d^2s}{dt^2}+\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\left(\dfrac{d^2s}{dt^2}\right)^2}{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^6}.$$

Exprimindo, agora, $\dfrac{ds}{dt}$ e $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ a partir das fórmulas (8) e (9) em função das derivadas de $\boldsymbol{r}\,(t)$, temos (*):

$$\frac{1}{R^2}=\frac{\left(\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)^2\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2-\left(\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\,\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2}{\left\{\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3}. \tag{10}$$

(*) Transformamos o denominador da maneira seguinte:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^6=\left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\}^3=\left\{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3.$$

Não podemos escrever $\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^6$, porque $\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2$ designa o quadrado escalar do vector $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ e $\left\{\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3$ designa o cubo do número $\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2$. A expressão $\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^6$ não tem sentido.

A fórmula (10) pode ser posta sob a forma (*):

$$K^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right]^2}{\left\{\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\right\}^3}. \tag{11}$$

Estabelecemos, então, uma fórmula que permite o cálculo da curvatura em todo o ponto duma curva dada pelas equações paramétricas de parâmetro qualquer.

Se, em particular, a curva é plana e está situada no plano Oxy, ela tem, para equações paramétricas:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = 0.$$

Substituindo estas expressões de x, y, z na fórmula (11), reencontramos a fórmula que exprime a curvatura duma curva *plana*, dada pelas equações paramétricas, que tínhamos estabelecido anteriormente (cf. Cap. VI):

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)|}{\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\}^{3/2}}.$$

Exemplo — Calcular a curvatura da hélice

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}a \operatorname{sen} t + \boldsymbol{k}amt,$$

num ponto qualquer.

Resolução.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\boldsymbol{i}a \operatorname{sen} t + \boldsymbol{j}a\cos t + \boldsymbol{k}am,$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\boldsymbol{i}a\cos t - \boldsymbol{j}a \operatorname{sen} t,$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a\sin t & a\cos t & am \\ -a\cos t & -a\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}a^2m \operatorname{sen} t - \boldsymbol{j}a^2m\cos t + \boldsymbol{k}a^2,$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)^2 = a^4(m^2+1),$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + a^2m^2 = a^2(1+m^2).$$

(*) Utilizamos a identidade

$$\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{ab})^2 = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2$$

que se verifica fàcilmente, pondo-a sob a forma:

$$a^2b^2 - (ab\cos\varphi)^2 = (ab \operatorname{sen}\varphi)^2.$$

Por conseguinte,

$$\frac{1}{R^2}=\frac{a^4(m^2+1)}{[a^2(1+m^2)]^3}=\frac{1}{a^2(1+m^2)^2},$$

donde

$$R=a(1+m^2)=\text{const.}$$

Concluímos, então, que o raio da curvatura da hélice é constante.

Nota — Pode-se sempre supor que uma curva plana está situada no plano Oxy. (Basta efectuar uma mudança de eixos de coordenadas.) No plano Oxy, $z=0$; mas, então, $\frac{d^2z}{ds^2}=0$, e, por conseguinte, o vector $\boldsymbol{n}$ está, igualmente, situado no plano Oxy. Uma conclusão se impõe, então: a normal principal duma curva plana está situada no plano da curva.

§ 5. Plano osculador. Binormal. Torção duma curva empenada

Definição — 1. Chama-se *plano osculador* a uma dada curva no ponto A ao plano definido pela tangente à curva e à normal principal nesse ponto.

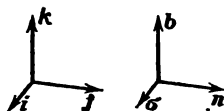
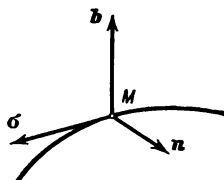



Fig. 200 Fig. 201

É evidente que o plano osculador a uma curva plana coincide com o plano dessa curva. Se a curva não é plana, os planos osculadores, correspondentes a dois pontos P e P_1 da curva, formam entre si um ângulo diedro μ. Quanto maior for μ, mais a curva difere duma curva plana. Para ser mais preciso, introduzamos a definição seguinte.

Definição — 2. Chama-se *binormal* à normal à curva perpendicular ao plano osculador.

Escolhamos, sobre a binormal, um vector unitário $\boldsymbol{b}$ e orientêmo-lo de modo que os vectores $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ formem um triedro trirectângular da mesma orientação que os vectores unitários $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ dos eixos das coordenadas (fig. 200, 201).

Temos, em virtude da definição dos produtos escalar e vectorial:

$$b = \sigma \times n; \quad bb = 1. \tag{1}$$

Calculemos a derivada $\frac{db}{ds}$. Em virtude da fórmula (IV), § 3, temos:

$$\frac{db}{ds} = \frac{d(\sigma \times n)}{ds} = \frac{d\sigma}{ds} \times n + \sigma \times \frac{dn}{ds}. \tag{2}$$

Mas $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{n}{R}$ (ver § 4), eis porque

$$\frac{d\sigma}{ds} \times n = \frac{1}{R} n \times n = 0,$$

e a fórmula (2) pode ser posta sob a forma

$$\frac{db}{ds} = \sigma \times \frac{dn}{ds}. \tag{3}$$

Resulta da definição do produto vectorial que o vector $\frac{db}{ds}$ é perpendicular ao vector da tangente σ. Por outro lado, $\frac{db}{ds}$ é perpendicular a b, visto que b é um vector unitário (ver § 3, Corolário).

Concluímos, então, que o vector $\frac{db}{ds}$ é perpendicular a σ e a b, isto é, colinear ao vector n.

Designemos por $\frac{1}{T}$ o comprimento do vector $\frac{db}{ds}$, isto é, façamos:

$$\left| \frac{db}{ds} \right| = \frac{1}{T};$$

então,

$$\frac{db}{ds} = \frac{1}{T} n. \tag{4}$$

Chama-se a $\frac{1}{T}$ *torção* da curva dada.

O ângulo diedro μ, formado pelos planos osculadores correspondente a dois pontos da curva, é igual ao ângulo formado pelas binormais.

Podemos, então, escrever uma fórmula análoga à fórmula (4) do § 4, Cap. IX:

$$\left|\frac{db}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mu}{|\Delta s|}.$$

Assim, a torção da curva no ponto A é igual, em valor absoluto, ao limite do quociente do ângulo μ, formado pelos planos osculadores no ponto A e no ponto vizinho B, pelo comprimento $|\Delta s|$ do arco AB quando $\Delta s \to 0$.

Se a curva é plana, o plano osculador não varia e, por conseguinte, a torção é igual a zero.

Resulta da definição de torção que esta quantidade caracteriza, o afastamento entre uma curva empenada e uma curva plana.

A quantidade T chama-se *raio de torção* da curva. Determinemos a fórmula que dá a torção. Resulta das fórmulas (3) e (4):

$$\frac{1}{T} \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\sigma} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$$

Multiplicando, escalarmente, os dois membros da igualdade por $\boldsymbol{n}$, temos:

$$\frac{1}{T} \boldsymbol{n}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\left[\boldsymbol{\sigma} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right].$$

O segundo membro desta igualdade é o que se chama o produto misto de três vectores $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\sigma}$ e $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$. Sabe-se que este produto não varia pela permutação circular dos factores. Como $\boldsymbol{n}\boldsymbol{n} = 1$, podemos pôr a última igualdade sob a forma:

$$\frac{1}{T} = \boldsymbol{\sigma}\left[\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \times \boldsymbol{n}\right]$$

ou

$$\frac{1}{T} = -\boldsymbol{\sigma}\left[\boldsymbol{n} \times \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\right]. \tag{5}$$

Mas, como $\boldsymbol{n} = R\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$, então,

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = R\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3} + \frac{dR}{ds}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$$

e

$$\left[n \times \frac{dn}{ds}\right] = R \frac{d^2r}{ds^2} \times \left\{R \frac{d^3r}{ds^3} + \frac{dR}{ds} \frac{d^2r}{ds^2}\right\} =$$

$$= R^2 \left[\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^3r}{ds^3}\right] + R \frac{dR}{ds} \left[\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^2r}{ds^2}\right],$$

o produto vectorial dum vector por si próprio sendo igual a zero,

$$\left[\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^2r}{ds^2}\right] = 0.$$

Assim

$$\left[n \times \frac{dn}{ds}\right] = R^2 \left[\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^3r}{ds^3}\right].$$

Verificando que $\sigma = \frac{dr}{ds}$ e voltando à igualdade (5), tem-se

$$\frac{1}{T} = -R^2 \frac{dr}{ds} \left[\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^3r}{ds^3}\right]. \tag{6}$$

Se r é expresso em função dum parâmetro arbitário t, pode-se demonstrar (*), da mesma maneira que no parágrafo pre-

---

(*) Com efeito,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt};$$

derivemos, uma vez mais, esta igualdade em relação a t:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt} + \frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2r}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Derivemos de novo a relação obtida em relação a t:

$$\frac{d^3r}{dt^3} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^2r}{ds^2}\right)\frac{ds}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d^2r}{ds^2}\,2\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$+ \frac{dr}{ds}\frac{d^3s}{dt^3} = \frac{d^3r}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3\frac{d^2r}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{dr}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}.$$

Formemos em seguida o produto misto:

$$\frac{dr}{dt}\left(\frac{d^2r}{dt^2} \times \frac{d^3r}{dt^3}\right) =$$

$$= \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}\left\{\left[\frac{d^2r}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dr}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\right] \times\right.$$

$$\left.\times \left[\frac{d^3r}{ds^3}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 3\frac{d^2r}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{dr}{ds}\frac{d^3s}{dt^3}\right]\right\}.$$

Desenvolvamos este produto, segundo a regra de multiplicação dos polinómios, omitindo todos os termos nos quais entram, pelo menos, dois vectores

cedente,

$$\frac{dr}{ds}\left[\frac{d^2r}{ds^2}\times\frac{d^3r}{ds^3}\right]=\frac{\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2}\times\frac{d^3r}{dt^3}\right]}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3}.$$

Substituindo esta expressão na fórmula (6) e substituindo R^2 pela sua expressão obtida da fórmula (11), § 4, obtemos, finalmente:

$$\frac{1}{T}=-\frac{\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2}\times\frac{d^3r}{dt^3}\right]}{\left[\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}\right]^2}. \qquad (7)$$

Esta fórmula permite-nos calcular a torção em qualquer ponto duma dada curva pelas suas equações paramétricas no caso dum parâmetro arbitrário t.

Notemos que as fórmulas que exprimem as derivadas dos vectores σ, b, n são chamadas fórmulas de *Serret-Frenet*:

$$\frac{d\sigma}{ds}=\frac{n}{R},\quad \frac{db}{ds}=\frac{n}{T},\quad \frac{dn}{ds}=-\frac{\sigma}{R}-\frac{b}{T}.$$

De entre elas, a última pode ser estabelecida como se segue:

$$n=b\times\sigma$$

$$\frac{dn}{ds}=\frac{d(b\times\sigma)}{ds}=\frac{db}{ds}\times\sigma+b\times\frac{d\sigma}{ds}=\frac{n}{T}\times\sigma+b\times\frac{n}{R}=$$

$$=\frac{1}{T}n\times\sigma+\frac{1}{R}b\times n;$$

---

idênticos (porque o produto misto de três vectores, em que dois são idênticos, é igual a zero); obtemos:

$$\frac{dr}{dt}\left(\frac{d^2r}{dt^2}\times\frac{d^3r}{dt^3}\right)=\frac{dr}{ds}\left(\frac{d^2r}{ds^2}\times\frac{d^3r}{ds^3}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^6.$$

Verificando que

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,\quad \text{ou}\quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^6=\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3.$$

obtemos a igualdade procurada.

mas

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{b}; \quad \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{\sigma},$$

eis porque

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\frac{\boldsymbol{b}}{T} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{R}.$$

Exemplo — Calcular a torção da hélice

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a \cos t + \boldsymbol{j}a \operatorname{sen} t + \boldsymbol{k}amt.$$

Resolução.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\left[\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}\right] = \begin{vmatrix} -a \operatorname{sen} t & a \cos t & am \\ -a \cos t & -a \operatorname{sen} t & 0 \\ a \operatorname{sen} t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = a^3 m,$$

$$\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right]^2 = a^4 (1 + m^2) \text{ (ver exemplo do § 4).}$$

Por conseguinte,

$$T = -\frac{a^4 (1 + m^2)}{a^3 m} = -\frac{a (1 + m^2)}{m}.$$

§ 6. Plano tangente e normal a uma superfície

Seja

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

a equação duma superfície.

Introduzamos as definições seguintes.

Definição — 1. Diz-se que uma recta é *tangente* a uma superfície num ponto $P(x, y, z)$ se ela é tangente a uma curva qualquer traçada sobre esta superfície e que passe por aquele ponto.

Visto que uma infinidade de curvas traçadas sobre a superfície passa pelo ponto $P(x, y, z)$, haverá igualmente neste ponto uma infinidade de tangentes a esta superfície.

Definamos os pontos simples e os pontos singulares duma superfície $F(x, y, z) = 0$.

Diz-se que o ponto M é um ponto *singular* da superfície se as três derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ se anulam, simultâneamente, neste ponto ou se uma, pelo menos, das derivadas não existe nesse ponto. O ponto M diz-se ponto *simples* se as derivadas $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z}$ existem são contínuas nesse ponto e se uma de entre elas, pelo menos, é diferente de zero.

Enunciemos o teorema seguinte.

Teorema — *Todas as rectas tangentes à superfície (1) no ponto simples* P *pertencem a um mesmo plano.*

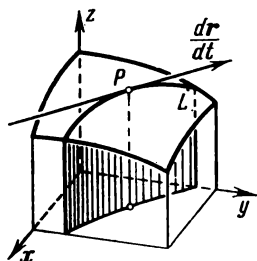
Demonstração — Consideremos sobre a superfície uma curva L (fig. 202) que passa por um dado ponto P da superfície. Sejam

Fig. 202

$$x = \varphi(t); \qquad y = \psi(t); \qquad z = \chi(t) \tag{2}$$

as equações paramétricas desta curva.

A tangente a esta curva é, por definição, uma tangente à superfície. As equações desta tangente são

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z - z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Se se substitui as expressões (2) na equação (1), esta equação torna-se numa identidade em relação a t, visto que a curva (2) está traçada sobre a superfície (1). Derivando esta identidade em relação a t, temos (*):

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0. \tag{3}$$

Consideremos, em seguida, os vectores N e $\frac{dr}{dt}$, que passam pelo ponto P:

$$N = \frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

As projecções $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ deste vector dependem das coordenadas x, y, z do ponto P. Notemos que estas projecções não se anulam simultâneamente no ponto P, visto que P é um ponto simples. Eis porque

$$|N| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \neq 0.$$

O vector

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} \tag{5}$$

(*) Utilizamos aqui a regra de derivação das funções compostas de três variáveis. Esta regra é válida no caso presente, visto que, as derivadas parciais $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ são contínuas por hipótese.

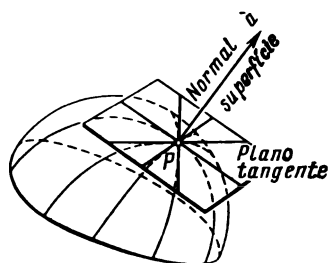
é tangente à curva que passa pelo ponto P e traçada sobre a superfície. Podem-se calcular as projecções deste vector a partir da equação (2), dando ao parâmetro t o valor que corresponde ao ponto P. Calculemos o produto escalar dos vectores $\boldsymbol{N}$ e $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$; ele é igual à soma dos produtos das projecções correspondentes:

$$\boldsymbol{N}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Em virtude da fórmula (3), o segundo membro desta expressão é igual a zero e, por conseguinte,

$$\boldsymbol{N}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0.$$

Fig. 203

Deduz-se desta igualdade que o vector $\boldsymbol{N}$ é perpendicular ao vector $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ da tangente à curva (2) no ponto P. A demonstração que acabamos de dar é válida para toda a curva (2) que passa pelo ponto P e traçada sobre a superfície. Por conseguinte, todas as tangentes a esta superfície no ponto P são perpendiculares a um mesmo vector $\boldsymbol{N}$ pertencem, pois, todas a um mesmo plano perpendicular ao vector $\boldsymbol{N}$. O teorema está demonstrado.

Definição — 2. O plano formado por todas as tangentes num ponto P às curvas traçadas sobre uma superfície que passe por este ponto chama-se *plano tangente* à superfície no ponto P (fig. 203).

Notemos que o plano tangente pode não existir se P é um ponto singular da superfície. Em tais pontos, as rectas tangentes à superfície podem não pertencer a um plano único. O vértice dum cone, por exemplo, é um ponto singular e neste ponto as tangentes à superfície não pertencem a um plano único (elas constituem precisamente a superfície cónica).

Formemos a equação do plano tangente à superfície (1) num ponto simples. Sendo este plano perpendicular ao vector (4), a sua equação é da forma

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0. \tag{6}$$

Se a superfície é dada pela equação

$$z=f(x,\ y) \quad \text{ou} \quad z-f(x,\ y)=0,$$

então,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 1,$$

e a equação do plano tangente é

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y). \tag{6'}$$

Nota — Se se fizer na fórmula (6′) $X - x = \Delta x$; $Y - y = \Delta y$, tem-se

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y;$$

o segundo membro é o diferencial total da função $z = f(x, y)$. Por conseguinte, $Z - z = dz$. Assim, o diferencial total de uma função de duas variáveis no ponto $M(x, y)$, que corresponde aos crescimentos Δx e Δy das variáveis independentes x e y, é igual ao crescimento correspondente da cota (z) do plano tangente à superfície que representa o gráfico dessa função.

Definição — 3. Chama-se *normal* à superfície (1) num ponto $P(x, y, z)$ à recta perpendicular ao plano tangente nesse ponto (fig. 203). Formemos a equação da normal. Sendo esta orientada segundo o vector N, a sua equação é

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{7}$$

Se a equação da superfície é $z = f(x, y)$ ou

$$z - f(x, y) = 0,$$

a equação da normal será:

$$\frac{X - x}{-\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{-\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - z}{1}.$$

Nota — Suponhamos que a superfície $F(x, y, z) = 0$ é a superfície de nível para uma função de três variáveis $u(x, y, z)$, isto é,

$$F(x, y, z) = u(x, y, z) - C = 0.$$

É evidente que o vector N, definido pela fórmula (4), dirigido segundo a normal à superfície de nível $F = u(x, y, z) - C = 0$, será

$$N = \frac{\partial u}{dx} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k,$$

isto é,

$$N = \operatorname{grad} u.$$

Por isso mesmo demonstramos que o *gradiante da função* $u(x, y, z)$ *é dirigido segundo a normal à superfície de nível que passa pelo ponto dado.*

Exemplo — Formar a equação do plano tangente e a equação da normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ no ponto $P(1, 2, 3)$.

Resolução.

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;$$

para $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, temos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 6.$$

Por conseguinte, a equação do plano tangente é:

$$2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0$$

ou

$$x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

A equação da normal e:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6},$$

ou

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

Exercícios

Calcular a derivada dos vectores:

1. $r = i \operatorname{ctg} t + j \operatorname{arc\,tg} t$. Resp. $r' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} i + \frac{1}{1+t^2} j$.

2. $r = ie^{-t} + j2t + k \operatorname{Log} t$. Resp. $r' = -ie^{-t} + 2j + \frac{k}{t}$.

3. $r = t^2 i - \frac{j}{t} + \frac{k}{t^2}$. Resp. $r' = 2ti + \frac{j}{t^2} - \frac{2k}{t^3}$.

4. Achar o vector da tangente, a equação da tangente e a equação do plano normal à curva $r = ti + t^2 j + t^3 k$ no ponto $(3, 9, 27)$.

   Resp. $r' = i + 6j + 27k$; a tangente é $\frac{x-3}{1} = \frac{y-9}{6} = \frac{z-27}{27}$; o plano normal: $x + 6y + 27z = 786$.

5. Achar o vector da tangente, a equação da tangente e a equação do plano normal à curva : $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\cos^2\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}\operatorname{sen} t+\boldsymbol{k}\operatorname{sen}\frac{t}{2}$. Resp. $\boldsymbol{r}'=$ $=-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\operatorname{sen} t+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}\cos t+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\cos\frac{t}{2}$; a equação da tangente é $\frac{X-\cos^2\frac{t}{2}}{-\operatorname{sen} t}=\frac{Y-\frac{1}{2}\operatorname{sen} t}{\cos t}=\frac{Z-\operatorname{sen}\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}$; a equação do plano normal é $+X\operatorname{sen} t-Y\cos t-Z\cos\frac{t}{2}=+x\operatorname{sen} t-y\cos t-z\cos\frac{t}{2}$, em que x, y, z são as coordenadas do ponto da curva por onde passa o plano normal $\left(\text{isto é,}\quad x=\cos^2\frac{t}{2},\ y=\frac{1}{2}\operatorname{sen} t,\ z=\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)$.

6. Achar a equação da tangente à curva $x=t-\operatorname{sen} t$, $y=1-\cos t$, $z=4\operatorname{sen}\frac{t}{2}$ e os cosenos directores desta tangente. Resp. $\frac{X-X_0}{\operatorname{sen}\frac{t_0}{2}}=$ $=\frac{Y-Y_0}{\cos\frac{t_0}{2}}=\frac{Z-Z_0}{\operatorname{ctg}\frac{t_0}{2}}$, $\cos\alpha=\operatorname{sen}^2\frac{t_0}{2}$; $\cos\beta=\frac{1}{2}\operatorname{sen} t_0$; $\cos\gamma=\cos\frac{t_0}{2}$.

7. Achar a equação do plano normal à curva $z=x^2-y^2$, $y=x$ na origem das coordenadas. *Indicação.* Exprimir a curva com o auxílio das equações paramétricas. Resp. $x+y=0$.

8. Achar σ, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ no ponto $t=\frac{\pi}{2}$ para a curva $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}(\cos t+\operatorname{sen}^2 t)+$ $+\boldsymbol{j}\operatorname{sen} t\,(1-\cos t)-\boldsymbol{k}\cos t$. Resp. $\sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$; $\boldsymbol{n}=\frac{-5\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}}{\sqrt{42}}$; $\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}}{\sqrt{14}}$.

9. Achar a equação da normal principal e da binormal à curva $x=\frac{t^4}{4}$; $y=\frac{t^3}{3}$; $z=\frac{t^2}{2}$ no ponto (x_0, y_0, z_0). Resp. $\frac{x-x_0}{t_0^3+2t_0}=\frac{y-y_0}{1-t_0^4}=$ $=\frac{z-z_0}{-2t_0^3-t_0}$; $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{-2t_0}=\frac{z-z_0}{t_0^2}$.

10. Determinar a equação do plano osculador à curva $y^2=x$; $x^2=z$ no ponto $M(1, 1, 1)$. Resp. $6x-8y-z+3=0$.

11. Determinar o raio de curvatura da curva dada pelas equações x^2+y^2+ $+z^2-4=0$, $x+y-z=0$. Resp. $R=2$.

12. Determinar o raio de torção da curva: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\cos t+\boldsymbol{j}\operatorname{sen} t+\boldsymbol{k}\frac{e^t-e^{-t}}{2}$. Resp. $T=\frac{(e^t+e^{-t})^2}{2(e^t-e^{-t})}$.

13. Determinar o raio de curvatura e o raio de torção da curva $\boldsymbol{r}=t^2\boldsymbol{i}+$ $+2t^3\boldsymbol{j}$. Resp. $R=\frac{2}{3}t(1+9t^2)^{3/2}$, $T=\infty$.

14. Demonstrar que a curva $r\,(a_1t^2+b_1t+c_1)\,i+(a_2t^2+b_2t+c_2)\,j+(a_3t^2+$ $+b_3t+c_3)\,k$ é uma curva plana. Resp $r''' \equiv 0$, razão porque a torção é nula.

15. Determinar a curvatura e a torção da curva $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t\sqrt{2}$.
Resp. A curvatura é igual a $\frac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$; a torção é $\frac{-\sqrt{2}}{(x-y)^2}$.

16. Determinar a curvatura e a torção da curva $x=e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t$; $y=e^{-t}\cos t$; $z=e^t$. Resp. A curvatura é igual a $\frac{\sqrt{2}}{3}e^t$, a torção a $\frac{1}{3}e^t$.

17. Determinar a equação do plano tangente à hiperbólide $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=$ $=1$ no ponto (x_1, y_1, z_1). Resp. $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}-\frac{z_1z}{c^2}=1$.

18. Determinar a equação da normal à superfície $x^2-4y^2+2z^2=6$ no ponto (2, 2, 3). Resp. $y+4x=10$; $3x-z=3$.

19. Determinar a equação do plano tangente à superfície $z=2x^2+4y^2$ no ponto $M\,(2, 1, 12)$. Resp. $8x+8y-z=12$.

20. Traçar um plano tangente à superfície $x^2+2y^2+z^2=1$ de modo que seja paralelo ao plano $-y+2z=0$. Resp. $x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$.

Capítulo X

INTEGRAL INDEFINIDO

§ 1. Primitiva e integral indefinido

Estudámos, no Capítulo III, o problema seguinte: sendo dada uma função $F(x)$, achar a sua derivada, isto é, a função $f(x) = F'(x)$.

Neste capítulo, consideraremos o problema inverso: sendo dada uma função $f(x)$, achar uma função $F(x)$ tal, que a sua derivada seja igual a $f(x)$, isto é,

$$F'(x) = f(x).$$

Definição — 1. Diz-se que a função $F(x)$ é uma *primitiva* da função $f(x)$ sobre o segmento $[a, b]$, se em todo o ponto deste segmento se tiver a igualdade $F'(x) = f(x)$.

Exemplo — Determinar uma primitiva da função $f(x) = x^2$.

Verifica-se imediatamente, segundo a definição, que a primitiva procurada é $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Com efeito, $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Verifica-se fàcilmente que se a função $f(x)$ admite uma primitiva, esta última não é única. Assim, no exemplo precedente, teríamos podido tomar como primitivas as funções seguintes: $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$; $F(x) = \frac{x^3}{3} - 7$ ou mais geralmente, $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ (em que C é uma constante arbitrária). Com efeito,

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2.$$

Por outro lado, pode-se demonstrar que uma primitiva qualquer da função x^2 é, necessàriamente, da forma $\frac{x^3}{3} + C$. Isso resulta do teorema seguinte.

Teorema — *Se* $F_1(x)$ *e* $F_2(x)$ *são duas primitivas da função* $f(x)$ *sobre o segmento* $[a, b]$, *a sua diferenca é uma constante.*

Demonstração — Temos, em virtude da definição da primitiva:

$$\left.\begin{aligned} F_1'(x) = f(x), \\ F_2'(x) = f(x), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

para qualquer x do segmento $[a, b]$.

Façamos

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x). \qquad (2)$$

Podemos, então, escrever, em virtude da igualdade (1):

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

ou

$$\varphi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' \equiv 0,$$

para todos os x pertencentes ao segmento $[a, b]$. Mas resulta da igualdade $\varphi'(x) = 0$ que $\varphi(x)$ é uma constante.

Com efeito, apliquemos o teorema de Lagrange (ver § 2, Cap. IV). a função $\varphi(x)$ que é contínua e derivável sobre o segmento $[a, b]$.

Em virtude do teorema de Lagrange, para todo o x arbitrário do segmento $[a, b]$, tem-se

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a)\varphi'(\xi),$$

em que $a < \xi < x$.

Mas, visto que $\varphi'(\xi) = 0$, então,

$$\varphi(x) - \varphi(a) = 0$$

ou

$$\varphi(x) = \varphi(\ ). \qquad (3)$$

Assim, a função $\varphi(x)$ conserva, em qualquer ponto do segmento $[a, b]$, o valor $\varphi(a)$. Ela é, pois, constante sobre o segmento $[a, b]$.

Designemos a constante $\varphi(a)$ por C. Resulta, então, das igualdades (2) e (3):

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

Resulta deste teorema que se conhecemos uma primitiva *qualquer* $F(x)$ da função $f(x)$, *qualquer outra* primitiva desta função será da forma $F(x) + C$, em que C é uma consatnte.

Definição — 2. Chama-se *integral indefinido* da função $f(x)$ e nota-se por $\int f(x)\,dx$ a toda a expressão da forma $F(x) + C$, em que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$. Assim, por definição,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

se

$$F'(x) = f(x).$$

Mais, $f(x)$ chama-se *função sob o sinal soma* ou *função a integrar;* $f(x)\,dx$, *expressão sob o sinal soma,* e o sinal $\int$, *sinal de integração* ou *sinal «soma».*

Assim, o integral indefinido representa uma *família de funções* $y = F(x) + C$.

Geomètricamente, pode-se considerar o integral indefinido como um conjunto (uma família) de curvas tais que se passa de uma a outra efectuando uma translação no sentido positivo ou negativo do eixo Oy.

Uma pergunta se põe naturalmente: toda a função $f(x)$ possui uma primitiva (e, por conseguinte, um integral indefinido)? A resposta é negativa, mas todavia notemos, sem o demonstrar, que *toda a função* $f(x)$ *contínua sobre o segmento* $[a, b]$ *possui uma primitiva* (e, por conseguinte, *um integral indefinido*).

O presente capítulo é consagrado à exposição dos diferentes métodos que permitem determinar a primitiva (e, por conseguinte, o integral indefinido) para certas classes de funções elementares.

O processo que permite encontrar a primitiva de uma função $f(x)$ chama-se *integração* da função $f(x)$.

Façamos a nota seguinte: no encontro da derivada que para uma função elementar é sempre uma função elementar, a primitiva duma função elementar pode não se exprimir com o auxílio dum número finito de funções elementares. Voltaremos, de resto, a esta questão no fim deste capítulo.

Resulta da definição 2 que:

1. *A derivada dum integral indefinido é igual à função a integrar, isto é, se* F′(x) = f(x), *então*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x). \tag{4}$$

Esta igualdade exprime que a derivada duma primitiva qualquer é igual à função a integrar.

2. *O diferencial dum integral indefinido é igual à expressão sob o sinal de soma*

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx. \tag{5}$$

Isto resulta da fórmula (4).

3. *O integral indefinido do diferencial duma certa função é igual à soma desta função e duma constante arbitrária*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

É fácil verificar esta igualdade por derivação (o diferencial de cada membro da igualdade é igual a $dF(x)$).

§ 2. Quadro de integrais

Antes de começar a exposição dos diferentes métodos de integração, daremos uma lista das primitivas de certas funções elementares.

Este quadro pode ser obtido directamente a partir da definição 2, § 1, Cap. X, e do quadro das derivadas (§ 15, Cap. III). (É fácil justificar todos os detalhes do quadro por derivação; isto é, pode-se verificar que a derivada do membro direito é igual à função a integrar).

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$ (Aqui e nas fórmulas seguintes, C designa uma constante arbitrária).

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \operatorname{Log}|x| + C.$

3. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C.$

4. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C.$

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

6. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

7. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\operatorname{Log}|\cos x| + C.$

8. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \operatorname{Log}|\operatorname{sen} x| + C.$

9. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

10. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\operatorname{Log} a} + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

11′. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{a} + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\operatorname{Log}\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen}\, x + C.$

13'. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sen}\, \frac{x}{a} + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \text{Log}\,|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

Nota — No quadro das derivadas (§ 15, Cap. III), as fórmulas correspondentes às fórmulas 7, 8, 11', 12, 13' e 14 faltam. É todavia fácil de as justificar por derivação.

No caso da fórmula 7, temos:

$$(-\text{Log}\,|\cos x\,|)' = -\frac{-\,\text{sen}\, x}{\cos x} = \text{tg}\, x,$$

por conseguinte, $\displaystyle\int \text{tg}\, x\, dx = -\,\text{Log}\,|\cos x\,| + C.$

No caso da fórmula 8,

$$(\text{Log}\,|\,\text{sen}\, x\,|)' = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \text{ctg}\, x,$$

por conseguinte, $\displaystyle\int \text{ctg}\, x = \text{Log}\,|\,\text{sen}\, x\,| + C.$

No caso da fórmula 12,

$$\left(\frac{1}{2a}\text{Log}\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)' = \frac{1}{2a}[\text{Log}\,|\,a+x\,| - \text{Log}\,|\,a-x\,|]' =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right] = \frac{1}{a^2-x^2},$$

por conseguinte, $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\text{Log}\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

Notemos que esta última fórmula resulta igualmente dos resultados gerais do § 9, Cap. X.

No caso da fórmula 14,

$$(\mathrm{Log}\,|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|)' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

por conseguinte, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mathrm{Log}\,|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

Esta fórmula resulta igualmente dos resultados gerais do § 11. Poder-se-ia justificar, duma maneira análoga, as fórmulas 11′ e 13′. Notemos, todavia, que elas são uma consequência imediata das fórmulas 11 e 13 que estabeleceremos mais adiante (ver § 4, exemplos 3 e 4).

§ 3. Algumas propriedades do integral indefinido

Teorema — 1. *O integral indefinido da soma algébrica de duas ou várias funções é igual à soma algébrica dos seus integrais*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \qquad (1)$$

Derivemos os dois membros desta igualdade. Em virtude da igualdade (4) do precedente parágrafo, podemos escrever:

$$\left(\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx\right)' = f_1(x) + f_2(x),$$

$$\left(\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx\right)' =$$

$$= \left(\int f_1(x)\,dx\right)' + \left(\int f_2(x)\,dx\right)' = f_1(x) + f_2(x).$$

Assim, a derivada do primeiro membro da igualdade (1) é igu à derivada do segundo membro, isto é, a derivada duma primit qualquer do segundo membro é igual à derivada duma função a trária que figura à direita. Resulta, daí, em virtude do teorema do § Capítulo X, que toda a função do primeiro membro da igualdade (1) apenas difere de qualquer função do segundo membro por uma constante. É neste caso que o sentido da igualdade (1) deve ser compreendido.

Teorema — 2. *Pode-se retirar um factor constante de debaixo do sinal soma, isto é, se* a = *const.*, então,

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Justifica-se esta igualdade derivando os dois membros:

$$(\int af(x)\,dx)' = af(x),$$
$$(a\int f(x)\,dx)' = a\,(\int f(x)\,dx)' = af(x).$$

As derivadas destes dois membros são iguais; por conseguinte, a diferença das funções que figuram à esquerda e à direita é constante. A igualdade (2) deve ser compreendida neste sentido.

No decurso do cálculo dos integrais indefinidos, é, por vezes, útil recordar-se as regras seguintes:

I. Se

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

então,

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C. \qquad (3)$$

Com efeito, derivando os dois membros da igualdade (3), temos:

$$(\int f(ax)\,dx)' = f(ax),$$
$$\left(\frac{1}{a}F(ax)\right)' = \frac{1}{a}(F(ax))'_x = \frac{1}{a}F'(ax)\,a = F'(ax) = f(ax).$$

As derivadas destes dois membros são iguais, c. q. d.

II. Se

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

então,

$$\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C. \qquad (4)$$

III. Se

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

então,

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \qquad (5)$$

Demonstra-se, igualmente, as igualdades (4) e (5), derivando os dois membros.

Exemplo — 1.

$$\int (2x^3 - 3\,\text{sen}\,x + 5\sqrt{x})\,dx = \int 2x^3\,dx -$$
$$-\int 3\,\text{sen}\,x\,dx + \int 5\sqrt{x}\,dx = 2\int x^3\,dx - 3\int \text{sen}\,x\,dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}\,dx =$$
$$= 2\,\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) + 5\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Exemplo — 2.

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+x\sqrt[4]{x}\right)dx=3\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx+\int x^{\frac{5}{4}}\,dx=3\,\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+\frac{1}{2}\,\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1}+$$

$$+C=\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+\frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x}+C.$$

Exemplo — 3.

$$\int \frac{dx}{x+3}=\operatorname{Log}|x+3|+C.$$

Exemplo — 4.

$$\int \cos 7x\,dx=\frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x+C.$$

Exemplo — 5.

$$\int \operatorname{sen}(2x-6)\,dx=-\frac{1}{2}\cos(2x-6)+C.$$

§ 4. Integração por mudança de variável

Seja calcular o integral

$$\int f(x)\,dx;$$

ainda que não saibamos calcular a primitiva da função $f(x)$, sabemos que ela existe.

Efectuemos neste integral a mudança de variável

$$x=\varphi(t), \tag{1}$$

em que $\varphi(t)$ é uma função contínua, bem como a sua derivada, e admitindo uma função inversa. Então, $dx=\varphi'(t)\,dt$; demonstremos que neste caso a igualdade

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \qquad (2$$

é satisfeita.

Subentende-se aqui que a variável t será substituída depois da integração do segundo membro pela sua expressão em função de x tirado de (1).

Para justificar a igualdade (2) neste sentido, basta mostrar que as duas quantidades consideradas de que cada uma apenas é definida a menos de uma constante arbitrária, têm a mesma derivada em relação a x. A derivada do primeiro membro é

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x=f(x).$$

Derivemos o segundo membro em relação a x tendo em conta que t é uma função de x. Resulta da igualdade (1) que $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ e, em virtude da regra de derivação das funções inversas,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Temos, por conseguinte:

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right)'_t \frac{dt}{dx} =$$

$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

As derivadas em relação a x dos dois membros da igualdade (2) são pois iguais, c. q. d.

A função $x = \varphi(t)$ deve ser escolhida de maneira que se saiba calcular o integral indefinido que figura à direita da igualdade (2).

Nota — É, por vezes, preferível escolher a mudança de variável sob a forma $t = \varphi(x)$ em vez de $x = \psi(t)$. Mostramo-lo num exemplo. Proponhamo-nos calcular um integral da forma

$$\int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)}.$$

Aqui é cómodo fazer

$$\psi(x) = t,$$

então,

$$\psi'(x)\,dx = dt,$$

$$\int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \text{Log}\,|t| + C = \text{Log}\,|\psi(x)| + C.$$

Demos, como aplicação do que precede, alguns exemplos de integração por mudança de variáveis.

Exemplo — 1. $\int \sqrt{\text{sen}\,x}\cos x\,dx = ?$ Efectuemos a mudança da variável $t = \text{sen}\,x$; então, $dt = \cos x\,dx$ e, por conseguinte, $\int \sqrt{\text{sen}\,x}\cos x\,dx =$
$= \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2}{3}\,\text{sen}^{\frac{3}{2}}\,x + C.$

Exemplo — 2. $\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = ?$ Façamos $t = 1 + x^2$; então, $dt = 2x\,dx$ e $\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\operatorname{Log} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+x^2) + C.$

Exemplo — 3. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$. Façamos $t = \frac{x}{a}$; então, $dx = a\,dt$, $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} t + C =$
$= \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$

Exemplo — 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$. Façamos $t = \frac{x}{a}$; então, (supomos aqui que $a > 0$).
$dx = a\,dt$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{a\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arc\,sen} t + C = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C$

Demonstra-se, nos exemplos 3 e 4, as fórmulas 11′ e 13′ do quadro de integrais (ver mais acima, § 2).

Exemplo — 5. $\int (\operatorname{Log} x)^3 \frac{dx}{x} = ?$ Façamos $t = \operatorname{Log} x$; então, $dt = \frac{dx}{x}$;
$\int (\operatorname{Log} x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}(\operatorname{Log} x)^4 + C.$

Exemplo — 6. $\int \frac{x\,dx}{1+x^4} = ?$ Façamos $t = x^2$; então, $dt = 2x\,dx$, $\int \frac{x\,dx}{1+x^4} =$
$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x^2 + C.$

O método de integração por mudança de variáveis é um dos métodos mais importantes do cálculo dos integrais indefinidos. Mesmo quando empregamos um outro método, sucede muitas vezes que se deve efectuar uma mudança de variáveis durante os cálculos intermediários. O sucesso da integração depende frequentemente da nossa habilidade em escolher a mudança de variável apropriada que simplifique os cálculos. Eis porque o estudo dos métodos de integração se reduz à determinação da mudança de variáveis a efectuar para integrar uma dada função. O presente capítulo é consagrado, em grande parte, à resolução deste trabalho.

§ 5. Integração de certas expressões contendo o trinómio $ax^2 + bx + c$

1. Consideremos o integral

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Transformemos, primeiramente, o denominador pondo-o sob a forma de uma soma ou de uma diferença de quadrados

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right],$$

em que se fez

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2.$$

Tomar-se-á o sinal mais ou o sinal menos, consoante o sinal do primeiro membro da relação precedente seja positivo ou negativo, isto é, consoante sejam as raízes do trinómio $ax^2 + bx + c$ complexas ou reais.

O integral I_1 pode, pois, ser posto sob a forma

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right]}.$$

Efectuemos uma mudança de variável fazendo

$$x + \frac{b}{2a} = t, \qquad dx = dt.$$

Temos, então,

$$I_1 = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}$$

são precisamente os integrais 11′ e 12 do quadro.

Exemplo — 1. Seja calcular o integral

$$\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}.$$

Resolução.

$$I=\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+10}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+4+10-4}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2+6}.$$

Façamos a mudança de variável $x+2=t$, $dx=dt$.

Depois da substituição em I, encontraremos um integral do quadro dos integrais

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+6}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{6}}+C.$$

Substituindo t pela sua expressão em função de x, temos, finalmente:

$$I=\frac{1}{2\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.$$

II. Consideremos um integral de um tipo mais geral

$$I_2=\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Ponhamos a função a integrar sob a forma seguinte

$$I_2=\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx=\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Este integral pode ser posto sob a forma duma soma de dois integrais e, retirando os factores constantes de debaixo do sinal soma, temos

$$I_2=\frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

O segundo integral é justamente I_1 que sabemos calcular. Efectuemos uma mudança de variável no primeiro integral fazendo

$$ax^2+bx+c=t, \qquad (2ax+b)\,dx=dt.$$

Por conseguinte,

$$\int \frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c}=\int \frac{dt}{t}=\operatorname{Log}|t|+C=\operatorname{Log}|ax^2+bx+c|+C.$$

Temos, então, finalmente:

$$I_2 = \frac{A}{2a} \operatorname{Log} | ax^2 + bx + c | + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) I_1.$$

Exemplo — 2. **Seja calcular o integral**

$$I = \int \frac{x+3}{x^2 - 2x - 5} \, dx.$$

Utilizemos o processo que acabamos de indicar:

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-2x-5} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2) + \left(3 + \frac{1}{2} 2\right)}{x^2-2x-5} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2)\, dx}{x^2-2x-5} + 4 \int \frac{dx}{x^2-2x-5} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Log} | x^2-2x-5 | + 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2-6} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Log} | x^2-2x-5 | + 2 \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{Log} \left| \frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)} \right| + C.$$

III. Consideremos o integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Com a ajuda da mudança de variável indicada no ponto *I* deste parágrafo reduz-se este integral segundo o sinal de *a* ou a um integral do tipo

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}},$$

no caso em que $a > 0$, ou a um integal do tipo

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}},$$

no caso em que $a < 0$; estes dois integrais figuravam no quadro de integrais (ver as fórmulas 13′ e 14).

IV. O integral

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

pode ser calculado com o auxílio de transformações análogas às consideradas no ponto II:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Efectuemos no primeiro integral uma mudança de variável, fazendo

$$ax^2+bx+c=t, \quad (2ax+b)\,dx=dt,$$

temos:

$$\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$$

O segundo integral foi já calculado no ponto III.

Exemplo — 3.

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} =$$

$$= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\,\mathrm{Log}\,|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}|+C =$$

$$= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7\,\mathrm{Log}\,|x+2+\sqrt{x^2+4+10}|+C.$$

§ 6. Integração por partes

Se u e v designam duas funções deriváveis de x, sabe-se que o diferencial do produto uv é:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Integrando-se, obtém-se:

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

ou

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{1}$$

É o que se chama a *fórmula de integração por partes*. Utiliza-se geralmente esta fórmula para a integração das expressões que podem ser postas sob a forma de dois factores u e dv, tais que a procura

da função v a partir do seu diferencial dv e do cálculo do integral $\int v\,du$ constituem um problema mais simples que o cálculo directo integral $\int u\,dv$. A habilidade requerida para efectuar uma escolha judiciosa dos dois factores u e dv necessita uma certa experiência que se adquire pela resolução dos exercícios. Indicaremos, nos exemplos, como é preciso proceder em casos semelhantes.

Exemplo — 1. Seja calcular $\int x \operatorname{sen} x\,dx = ?$. Façamos

$$u = x, \quad dv = \operatorname{sen} x\,dx;$$

então,

$$du = dx, \quad v = -\cos x.$$

Por conseguinte,

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

Nota — Quando determinamos v a partir do seu diferencial dv, podemos tomar uma constante arbitrária, visto que ela não figura no resultado final (o que é fácil de verificar, substituindo na igualdade (1) v por $v + C$). Eis porque é preferível escolher esta constante igual a zero.

O método de integração por partes, emprega-se frequentemente. Por exemplo, pode-se calcular com o auxílio deste método os integrais da forma

$$\int x^k \operatorname{sen} ax\,dx, \qquad \int x^k \cos ax\,dx,$$

$$\int x^k e^{ax}\,dx, \qquad \int x^k \operatorname{Log} x\,dx,$$

assim como outros integrais nos quais entrem as funções trigonométricas inversas.

Exemplo — 2. Seja calcular $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$. Façamos $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $dv = dx$; então, $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Por conseguinte,

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\operatorname{Log}|1+x^2| + C.$$

Exemplo — 3. Seja calcular $\int x^2 e^x\,dx$. Façamos $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$; então, $du = 2x\,dx$, $v = e^x$,

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\,dx.$$

Apliquemos de novo a este último integral o método de integração por partes, fazendo:

$$u_1 = x,\ du_1 = dx,$$
$$dv_1 = e^x\,dx,\ v_1 = e^x.$$

Então,

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Temos, finalmente:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2e^x - 2\,(xe^x - e^x) + C = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x\,(x^2 - 2x + 2) + C.$$

Exemplo — 4. Seja calcular $\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x\,dx$. Façamos $u = x^2 + 7x - 5$; $dv = \cos 2x\,dx$; então,

$$du = (2x + 7)\,dx,\quad v = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2},$$

$$\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x\,dx = (x^2 + 7x - 5)\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \int (2x + 7)\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\,dx.$$

Apliquemos o método de integração por partes a este último integral fazendo $u_1 = \frac{2x + 7}{2}$, $dv_1 = \operatorname{sen} 2x\,dx$; então,

$$du_1 = dx,\quad v_1 = -\frac{\cos 2x}{2},$$

$$\int \frac{2x + 7}{2}\operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{2x + 7}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx =$$
$$= -\frac{(2x + 7)\cos 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C.$$

Donde, em definitivo:

$$\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x\,dx = (x^2 + 7x - 5)\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + (2x + 7)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C.$$

Exemplo — 5. $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = ?$

Multipliquemos e dividamos a função a integrar por $\sqrt{a^2 - x^2}$:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$
$$= a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} - \int x\,\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Apliquemos a este integral o método de integração por partes, fazendo

$$u = x,\ du = dx,$$
$$dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},\ v = -\sqrt{a^2 - x^2};$$

então,

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int x \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Substituindo este resultado na expressão que acabamos de obter anteriormente pelo integral procurado, determinamos

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Efectuando certas transformações elementares evidentes, temos, finalmente:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Exemplo — 6. Calcular os integrais

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx\,dx \text{ et } I_2 = \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx.$$

Aplicando o método de integração por partes ao primeiro integral, tem-se:

$$u = e^{ax},\quad du = ae^{ax},$$

$$dv = \cos bx\,dx,\quad v = \frac{1}{b}\operatorname{sen} bx,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b} e^{ax}\operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx.$$

Apliquemos de novo o método de integração por partes a este último integral:

$$u = e^{ax},\quad du = ae^{ax},$$

$$dv = \operatorname{sen} bx\,dx,\quad v = -\frac{1}{b}\cos bx,$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = -\frac{1}{b} e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Substituindo a expressão obtida na igualdade precedente, temos:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b} e^{ax}\operatorname{sen} bx + \frac{a}{b^2} e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Deduzimos I_1 desta igualdade:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\operatorname{sen} bx + \frac{a}{b^2}\cos bx\right) + C^*,$$

donde,

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(b\operatorname{sen} bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C.$$

Obtém-se, do mesmo modo:

$$I_2 = \int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C.$$

§ 7. Fracções racionais. Fracções racionais elementares e sua integração

Como vamos ver, não são todas as funções elementares que se integram com a ajuda de funções elementares. Eis porque é muito importante definir as classes de funções cujos integrais podem ser expressos com o auxílio de funções elementares. Entre estas classes, a mais simples é a das funções racionais.

Toda a função racional pode ser posta sob a forma de fracção racional, isto é, sob a forma de quociente de dois polinómios:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=\frac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n}.$$

Podemos supor, sem restringir a generalidade, que estes polinómios não têm raízes comuns.

Se o grau do numerador é inferior ao do denominador, diz-se, então, que a fracção é *regular* no caso contrário diz-se que ela é *irregular*.

Se a fracção é irregular, dividindo o numerador pelo denominador (segundo a regra de divisão dos polinómios), pode-se representar a fracção inicial como a soma dum polinómio e duma fracção regular:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=M(x)+\frac{F(x)}{f(x)},$$

em que $M(x)$ é um polinómio e $\frac{F(x)}{f(x)}$, uma fracção regular.

Exemplo — 1. Seja

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}$$

uma fracção racional irregular.

Dividindo o numerador pelo denominador (segundo a regra de divisão dos polinómios), temos:

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x-6}{x^2+2x+1}.$$

A integração dos polinómios não representam nenhuma dificuldade, o nosso trabalho consiste, então, em integrar as fracções racionais *regulares*.

Definição — As fracções racionais regulares do tipo:

I. $\frac{A}{x-a}$,

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k é um número inteiro positivo $\geqslant 2$).

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (as raízes do denominador são complexas, isto é, $\dfrac{p^2}{4}-q<0$),

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k é um inteiro $\geqslant 2$; as raízes do denominador são complexas) chamam-se, respectivamente, *elementos simples de tipos* I, II, III e IV.

Demonstraremos, no parágrafo 8, que toda a fracção racional pode ser posta sob a forma de soma de elementos simples. Por esta razão, consideraremos primeiro os integrais dos elementos simples.

A integração dos elementos simples de tipos I, II e III não apresenta grandes dificuldades, eis porque integramo-los sem dar explicações detalhadas:

$$\text{I.}\quad \int \frac{A}{x-a}\,dx = A\,\mathrm{Log}\,|x-a| + C.$$

$$\text{II.}\quad \int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,dx =$$

$$= A\,\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

$$\text{III.}\quad \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\,\mathrm{Log}\,|x^2+px+q| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\times$$

$$\times \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\,\mathrm{Log}\,|x^2+px+q| +$$

$$+ \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\,\mathrm{arc\ tg}\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

(ver § 5).

A integração dos elementos simples do tipo IV está ligada a cálculos mais complicados. Seja calcular um integral:

$$\text{IV.} \quad \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx.$$

Efectuemos as transformações:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

O primeiro integral pode ser calculado por uma mudança de variável pondo $x^2+px+q=t$; $(2x+p)\,dx=dt$:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}\,dt = \frac{t^{-k+1}}{1-k}+C =$$

$$= \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}+C.$$

Chamemos I_k ao segundo integral e ponhamo-lo sob a forma

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} =$$

$$= \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

em que se fez

$$x+\frac{p}{2}=t, \qquad dx=dt, \qquad q-\frac{p^2}{4}=m^2$$

(por hipótese, as raízes do denominador são complexos e, por conseguinte $q-\frac{p^2}{4}>0$).

Procedemos, em seguida, da maneira seguinte:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt =$$

$$= \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt.$$

Transformemos este último integral:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k} = \int \frac{t\cdot t\,dt}{(t^2+m^2)^k} =$$

$$= \frac{1}{2}\int t\,\frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\int t\,d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right).$$

Integrando por partes, obtemos:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\left[t\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right].$$

Substituindo esta expressão na igualdade (1), temos:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} +$$

$$+\frac{1}{m^2}\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right] =$$

$$= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

O integral que figura no segundo membro é do mesmo tipo que I_k com a diferença de que o grau do denominador da função a integrar é duma unidade inferior $(k-1)$; então, exprimimos I_k em função de I_{k-1}.

Aplicando, sucessivamente, este processo chega-se ao integral conhecido:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{m} + C.$$

Substituindo em seguida t e m pelas suas expressões correspondentes em função de x, obtém-se a expressão do integral IV em função de x, A, B, p, q.

Exemplo — 2.

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{(x^2+2x+3)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Façamos neste último integral $x + 1 = t$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+2)^2}.$$

Consideremos, agora, este último integral:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{t\,d(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2} \int t\,d\left(\frac{1}{t^2+2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{2}}$$

(é inútil juntar uma constante arbitrária; escreve-la-emos na expressão definitiva). Por conseguinte,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right].$$

Temos, finalmente:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

§ 8. Decomposição das fracções racionais em elementos simples

Demonstremos que toda a fracção racional regular pode ser posta, e isso duma só maneira, sob a forma duma soma de elementos simples.

Seja:

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

uma fracção racional regular.

Suporemos que os coeficientes dos polinómios que a compõem são reais e que, além disso, a fracção é irredutível (isto é, que o numerador e o denominador não têm raízes comuns).

Teorema — 1. *Seja* x = a *uma raiz múltipla de ordem* k *do denominador, isto é,* $f(x) = (x - a)^k f_1(x)$, *em que* $f_1(a) \neq 0$ (ver § 6,

Cap. VII); *a fracção regular* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *pode, então, decompor-se numa soma de duas fracções regulares da seguinte maneira:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \tag{1}$$

em que o coeficiente A *é diferente de zero e* $F_1(x)$ *é um polinómio de grau inferior ao do denominador* $(x-a)^{k-1} f_1(x)$.

Demonstração — Escrevamos a identidade

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x) - Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \tag{2}$$

(esta tem lugar qualquer que seja A) e determinemos A de modo que o polinómio $F(x) - Af_1(x)$ seja divisível por $x - a$. Em virtude do teorema de Bezout, é preciso e basta que a igualdade

$$F(a) - Af_1(a) = 0$$

seja verificada. Como $f_1(a) \neq 0$, $F(a) \neq 0$, pode-se determinar A duma maneira unívoca a partir desta igualdade com

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Para um tal A temos

$$F(x) - Af_1(x) = (x-a) F_1(x),$$

em que $F_1(x)$ é um polinómio de grau inferior ao do polinómio $(x-a)^{k-1} f_1(x)$. Simplifiquemos a fracção na fórmula (2) dividindo o numerador e o denominador por $(x-a)$. Obtemos, então, a igualdade procurada (1).

Corolário — Pode-se aplicar um raciocínio análogo à fracção racional regular

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}$$

que entra na composição da igualdade (1). Assim, se o denominador da fracção tem uma raíz múltipla $x = a$ de ordem k, pode-se escrever:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

em que $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ é uma fracção regular irredutível. Pode-se aplicar o teorema que acabamos de demonstrar a esta nova fracção, se $f_1(x)$ tiver outras raízes reais.

Estudemos agora o caso em que o denominador tem raízes complexas. Lembremo-nos, primeiramente, que as raízes complexas dum polinómio de coeficientes reais são conjugadas duas a duas (ver § 8, Cap. VII).

Na decomposição do polinómio em factores reais, a cada par de raízes conjugadas corresponde uma expressão da forma $x^2 + px + q$; se as raízes complexas conjugadas são múltiplas de ordem μ, a expressão correspondente será $(x^2 + px + q)^\mu$.

Teorema — 2. *Se* $f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)$ *em que o polinómio* $\varphi_1(x)$ *não é divisível por* $x^2 + px + q$, *a fracção racional regular* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *pode ser representada pela soma de duas fracções regulares da maneira seguinte*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu-1} \varphi_1(x)}, \tag{3}$$

em que $\Phi_1(x)$ *é um polinómio de grau inferior ao do polinómio* $(x^2 + px + q)^{\mu-1} \varphi_1(x)$.

Demonstração — Escrevamos a identidade

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)} =$$

$$= \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)}, \tag{4}$$

que tem lugar, quaisquer que sejam M e N. Determinemos M e N de modo que o polinómio $F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)$ seja divisível por $x^2 + px + q$. Para isso, é preciso e basta que a equação

$$F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = 0$$

tenha as mesmas raízes $\alpha \pm i\beta$ que o polinómio $x^2 + px + q$. Por conseguinte,

$$F(\alpha + i\beta) - [M(\alpha + i\beta) + N]\varphi_1(\alpha + i\beta) = 0$$

ou

$$M(\alpha + i\beta) + N = \frac{F(\alpha + i\beta)}{\varphi_1(\alpha + i\beta)}.$$

Mas $\frac{F(\alpha + i\beta)}{\varphi_1(\alpha + i\beta)}$ é um número complexo, bem determinado, que se pode pôr sob a forma $K + iL$, em que K e L são números reais.

Assim,

$$M(\alpha + i\beta) + N = K + iL;$$

donde

$$M\alpha + N = K, \qquad M\beta = L$$

ou

$$M = \frac{L}{\beta}, \qquad N = \frac{K\beta - L\alpha}{\beta}.$$

Se se escolherem os coeficientes M e N desta maneira, o polinómio $F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)$ terá por raíz $\alpha + i\beta$, e, por conseguinte, a raíz conjugada $\alpha - i\beta$. Assim, este polinómio é divisível exactamente por $x - (\alpha + i\beta)$ e $x - (\alpha - i\beta)$, e, por conseguinte, pelo seu produto, isto é, por $x^2 + px + q$. Designando o quociente desta divisão por $\Phi_1(x)$, obtemos:

$$F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = (x^2 + px + q)\Phi_1(x).$$

Simplificando por $x^2 + px + q$ a última fracção da igualdade (4), deduzimos a igualdade (3), e é claro que $\Phi_1(x)$ é um polinómio de grau inferior ao do denominador, c. q. d.

Aplicando os teoremas 1 e 2 à fracção regular $\frac{F(x)}{f(x)}$, determinam-se todos os elementos simples correspondentes às raízes do denominador $f(x)$. Podemos, então, enunciar a proposição seguinte.

Se

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x^2 + px + q)^\mu \ldots$$
$$\ldots (x^2 + lx + s)^\nu,$$

a fracção $\frac{F(x)}{f(x)}$ *pode ser decomposta da maneira seguinte:*

$$\left.\begin{aligned}
\frac{F(x)}{f(x)} = {} & \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \\
& + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \ldots \\
& \ldots + \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^\nu} + \\
& + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Podem-se determinar os coeficientes A, A_1, ..., B, B_1, ..., tendo em conta as considerações seguintes. A igualdade (5) é uma *identidade*, por conseguinte, se reduzirmos estas fracções ao mesmo denominador, teremos nos denominadores à direita e à esquerda polinómios idênticamente iguais. Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, obtemos um sistema de equações para determinar os coeficientes desconhecidos A, A_1, ..., B, B_1, ...

Podemos, igualmente, determinar estes coeficientes tendo em conta a nota seguinte: os polinómios que se obtêm à direita e à esquerda da igualdade após redução das fracções ao mesmo denominador devem ser idênticamente iguais, por conseguinte, os valores destes polinómios são iguais qualquer que seja o valor de x. Dando a x certos valores concretos, obtemos as equações necessárias para determinar os coeficientes.

Assim, demonstramos que toda a fracção racional regular pode ser posta sob a forma duma soma de elementos simples.

Exemplo — Seja decompôr a fracção $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ em elementos simples. Em virtude da fórmula (5), temos:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B}{x-2}.$$

Reduzamos ao mesmo denominador comum as fracções e igualemos os numeradores. Obtemos:

$$x^2+2=A(x-2)+A_1(x+1)(x-2)+A_2(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3, \qquad (6)$$

ou

$$x^2+2=(A_2+B)x^3+(A_1+3B)x^2+(A-A_1-3A_2+3B)x+$$
$$+(-2A-2A_1-2A_2+B).$$

Igualando os coeficientes de x^3, x^2, x^1, x^0, obtemos um sistema de equações para determinar os coeficientes:

$$0=A_2+B,$$
$$1=A_1+3B,$$
$$0=A-A_1-3A_2+3B,$$
$$2=-2A-2A_1-2A_2+B.$$

A resolução deste sistema dá:

$$A=-1; \quad A_1=\frac{1}{3}; \quad A_2=-\frac{2}{9}; \quad B=\frac{2}{9}.$$

Poder-se-ia, igualmente, determinar certos coeficientes a partir das equações que se obtêm da igualdade (6) que é uma identidade em x, dando à variável x certos valores particulares.

Assim, fazendo $x=-1$, obtemos $3=-3A$ ou $A=-1$; fazendo $x=2$, obtemos $6=27B$; $B=\frac{2}{9}$. Se juntarmos a estas duas equações duas outras obtidas igualando os coeficientes das mesmas potências de x, teremos quatro equações a quatro incógnitas para determinar os coeficientes. Temos, finalmente, a decomposição:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}.$$

§ 9. Integração das fracções racionais

Seja calcular o integral da fracção racional $\frac{Q(x)}{f(x)}$, isto é, o integral

$$\int \frac{Q(x)}{f(x)}\,dx.$$

Se a fracção dada é *irregular*, pomo-la sob a forma duma soma dum polinómio $M(x)$ e duma fracção racional regular $\frac{F(x)}{f(x)}$ (ver § 7). Pomos, em seguida, a fracção $\frac{F(x)}{f(x)}$ sob a forma duma soma de *elementos simples* (ver (5), § 8). Assim, a integração duma fracção racional arbitrária reduz-se à integração dum polinómio e de vários *elementos simples.*

Vimos, no § 8, que estes elementos simples eram definidos pelas raízes do denominador $f(x)$ Os diferentes casos são possíveis:

1.º caso — *As raízes do denominador são reais e diferentes*, isto é,

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-d).$$

Neste caso, a fracção $\frac{F(x)}{f(x)}$ decompõe-se em elementos simples do primeiro tipo:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{D}{x-d},$$

e, então,

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,dx + \int \frac{B}{x-b}\,dx + \ldots + \int \frac{D}{x-d}\,dx =$$

$$= A \operatorname{Log}|x-a| + B \operatorname{Log}|x-b| + \ldots$$
$$\ldots + D \operatorname{Log}|x-d| + C.$$

2.º caso — *As raízes do denominador são todas reais, mas algumas são múltiplas:*

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-d)^{\delta}.$$

Neste caso a fracção $\frac{F(x)}{f(x)}$ pode ser decomposta em elementos simples dos tipos I e II.

Exemplo — 1. (Ver exemplo no § 8, Cap. X).

$$\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,dx = -\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+1} +$$

$$+\frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9}\,\mathrm{Log}\,|x+1| +$$

$$+\frac{2}{9}\,\mathrm{Log}\,|x-2| + C = -\frac{2x-1}{6(x+1)^2} + \frac{2}{9}\,\mathrm{Log}\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.$$

3.° caso — *O denominador tem raízes complexas simples* (isto é, *diferentes*):

$$f(x) = (x^2+px+q)(x^2+lx+s)\ldots(x-a)^{\alpha}\ldots(x-d)^{\delta}.$$

Neste caso, a fracção $\frac{F(x)}{f(x)}$ decompõe-se em elementos simples dos tipos I, II, III.

Exemplo — 2. Seja calcular o integral

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Decomponhamos a fracção que figura sob o sinal de integração em elementos simples (ver (5), § 8, Cap. X.

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Por conseguinte,

$$x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1).$$

Fazendo $x = 1$, obtemos: $1 = 2C,\ C = \frac{1}{2}$;

Fazendo $x = 0$, obtemos: $0 = -B + C,\ B = \frac{1}{2}$.

Igualando os coeficientes de x^2, temos $0 = A + C$, donde $A = -\frac{1}{2}$.

Assim,

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\,\mathrm{Log}\,|x^2+1| + \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\ tg}\,x + \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,|x-1| + C.$$

4.° caso — *O denominador comporta igualmente raízes complexas múltiplas:*

$$f(x) = (x^2+px+q)^{\mu}(x^2+lx+s)^{\nu}\ldots(x-a)^{\alpha}\ldots(x-d)^{\delta}.$$

Neste caso, os elementos simples do tipo IV entram também na decomposição da fracção $\frac{F(x)}{f(x)}$.

Exemplo — 3. Seja calcular o integral

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2\,(x+1)}\,dx.$$

Resolução — Decomponhamos a fracção em elementos simples:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2\,(x+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)}+\frac{E}{x+1},$$

donde

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8=$$
$$=(Ax+B)(x+1)+(Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1)+E(x^2+2x+3)^2.$$

Combinando os dois métodos dados para a determinação dos coeficientes, obtemos:

$$A=1,\ B=-1,\ C=0,\ D=0,\ E=1.$$

Tem-se assim:

$$\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2\,(x+1)}\,dx=\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx+\int \frac{dx}{x+1}=$$
$$=-\frac{x+2}{2\,(x^2+2x+3)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\operatorname{Log}|x+1|+C.$$

Calculámos, no exemplo 2, § 7, Cap. X, o primeiro integral do segundo membro. O segundo integral pode ser calculado imediatamente.

Resulta do estudo efectuado que o integral duma função racional qualquer pode ser expressa por funções elementares em número finito:

1) por logaritmos, se os elementos simples são do tipo I;
2) por funções racionais, se os elementos simples são do tipo II;
3) por logaritmos e arcos tangentes se os elementos simples são do tipo III;
4) por funções racionais e arcos tangentes se os elementos simples são do tipo IV.

§ 10. Método de Ostrogradsky

Pode-se empregar um outro método para calcular o integral duma função racional quando o denominador tem raízes *múltiplas*. Este método é muito mais simples: ele permite isolar a *parte racional* do integral sem decompôr a fracção em elementos simples e, em seguida, integrar uma fracção racional cujo denominador só tem raízes *simples*. A integração de uma tal fracção não apresenta nenhuma dificuldade, visto que ela pode ser decomposta em elementos simples dos tipos I e III. Este método é devido ao célebre matemático russo M. Ostrogradsky (1801-1861) e é baseado nas considerações seguintes.

Seja integrar uma fracção racional regular $\frac{F(x)}{f(x)}$, em que

$$f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x^2+px+q)^{\mu}\ldots(x^2+lx+s)^{\nu}.$$

Neste caso, em virtude da fórmula (5), § 8, a operação reduz-se simplesmente à integração de elementos simples dos quatro tipos considerados (ver § 7). Mais:

1) O integral duma fracção do tipo $\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}$ é uma fracção do tipo $\frac{A^*}{(x-a)^{\alpha-1}}$;

2) O integral da fracção $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\mu}}$ é uma soma de fracções do tipo $\frac{M^*x+N^*}{(x^2+px+q)^{\mu^*}}$, em que $\mu^* \leq \mu - 1$, e dum integral do tipo

$$\int \frac{N^{**}}{x^2+px+q}\,dx.$$

Deixemos de lado, por momentos, a integração das fracções de tipos I e III.

Adicionemos as fracções racionais que se obtêm após integração das fracções dos tipos II e IV; deduzimos uma fracção racional regular do tipo $\frac{Y(x)}{Q(x)}$, em que o polinómio $Q(x)$ é igual a

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+px+q)^{\mu-1}\ldots(x^2+lx+s)^{\nu-1}.$$

$Y(x)$ é um polinómio cujo grau é inferior em uma unidade ao grau do polinómio Q.

Adicionando os integrais de todas as fracções dos tipos I e III (compreendidos os integrais do tipo $\int \frac{N^{**}}{x^2+px+q}\,dx$, obtidos por integração de elementos simples do tipo IV), deduzimos o integral duma fracção regular do tipo $\frac{X(x)}{P(x)}$, em que $P(x)$ é um polinómio,

$$P(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x^2+px+q)\ldots(x^2+lx+s).$$

Assim, determina-se que

$$\int \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Y(x)}{Q(x)} + \int \frac{X(x)}{P(x)}\,dx. \qquad (1)$$

$X(x)$ é um polinómio cujo grau é inferior em uma unidade, à do polinómio $P(x)$.

Determinemos agora os polinómios $X(x)$ e $Y(x)$. Para tal derivemos em relação a x os dois membros da igualdade (1):

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{QY' - Q'Y}{Q^2} + \frac{X}{P}$$

ou

$$F(x) = \frac{f(x)\,Y'}{Q} - \frac{f(x)\,Q'Y}{Q^2} + \frac{f(x)\,X}{P}. \qquad (2)$$

Mostremos que a expressão que figura à direita é um polinómio. Lembremos que $f(x) = PQ$; por conseguinte, podemos pôr a igualdade (2) sob a forma

$$F(x) = PY' - \frac{PQ'Y}{Q} + QX. \qquad (2')$$

Resta-nos, então, provar que a expressão $-\dfrac{PQ'Y}{Q}$ é um polinómio ou que PQ' é divisível por Q. Notemos para isso que

$$\frac{Q'}{Q} = [\mathrm{Log}\,Q]' = [(\alpha - 1)\,\mathrm{Log}\,(x-a) + (\beta - 1)\,\mathrm{Log}\,(x-b) + \ldots$$

$$\ldots + (\mu - 1)\,\mathrm{Log}\,(x^2 + px + q) + \ldots$$

$$\ldots + (\nu - 1)\,\mathrm{Log}\,(x^2 + lx + s)]' = \frac{\alpha - 1}{x-a} + \frac{\beta - 1}{x-b} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(\mu - 1)(2x + p)}{x^2 + px + q} + \ldots + \frac{(\nu - 1)(2x + l)}{x^2 + lx + s}.$$

O polinómio P será o denominador comum das fracções que figuram no segundo membro. O numerador será um polinómio de grau inferior ao de P. Designemo-lo por T. Assim,

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{T}{P}.$$

Por conseguinte, a expressão

$$P\frac{Q'}{Q}Y = P\frac{T}{P}Y = TY$$

é um polinómio. A igualdade (2') torna-se, então,

$$F(x) = PY' - TY + QX. \qquad (3)$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, obtemos um sistema de equações de onde determinamos os coeficientes desconhecidos dos polinómios X e Y.

Exemplo — Seja calcular

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2}\,dx.$$

Resolução — Neste caso

$$f(x) = (x-1)^2(x^2+x+1)^2,$$
$$P(x) = (x-1)(x^2+x+1) = x^3-1,$$
$$Q(x) = \qquad\qquad = x^3-1.$$

A igualdade (1) transforma-se, então, em:

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1}\,dx. \qquad (4)$$

Derivemos os dois membros desta igualdade; temos:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(x^3-1)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+C)\,3x^2}{(x^3-1)^2} + \frac{Ex^2+Fx+G}{x^3-1},$$

donde

$$1 = (x^3-1)(2Ax+B) - (Ax^2+Bx+C)\,3x^2 + (x^3-1)(Ex^2+Fx+G).$$

Igualemos os coeficientes das mesmas potências de x. Obtemos um sistema de seis equações para determinar os coeficientes A, B, C, E, F, G:

$$0 = E, \qquad 0 = 3C - E,$$
$$0 = -A + F, \qquad 0 = -2A - F,$$
$$0 = -2B + G, \qquad 1 = -B - G.$$

A resolução deste sistema dá-nos:

$$E=0,\ A=0,\ C=0,\ B=-\frac{1}{3},\ F=0,\ G=-\frac{2}{3}.$$

Substituamos os valores achados dos coeficientes na igualdade (4). Temos:

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{-\frac{1}{3}x}{x^3-1} + \int \frac{-\frac{2}{3}}{x^3-1}\,dx.$$

O denominador deste último integral só tem raízes simples, por conseguinte, a integração não apresenta nenhuma dificuldade e temos, finalmente:

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{-x}{3(x^3-1)} + \int \left[\frac{-\frac{2}{9}}{x-1} + \frac{\frac{2}{9}x + \frac{4}{9}}{x^2+x+1} \right] dx =$$

$$= -\frac{x}{3(x^2-1)} - \frac{2}{9} \operatorname{Log} |x-1| + \frac{1}{9} \operatorname{Log} (x^2+x+1) +$$

$$+ \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

§ 11. Integração das funções irracionais

Não é sempre possível exprimir o integral duma função irracional qualquer com o auxílio de funções elementares. Vamos estudar, neste parágrafo e nos parágrafos seguintes, as funções irracionais cujos integrais podem ser reduzidos por mudança de variáveis apropriadas às funções racionais que sabemos integrar.

I. Consideremos o integral $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$, em que R é uma função racional dos seus integrais (*).

Seja k o denominador comum das fracções $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

Efectuemos a substituição

$$x = t^k, \qquad dx = kt^{k-1}\,dt.$$

Cada potência *fraccionária* de x pode, então, ser expressa por uma potência *inteira* de t, e, por conseguinte, a função a integrar transforma-se numa *função racional* de t.

Exemplo — 1. Seja calcular o integral

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}.$$

(*) O símbolo $R(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$ indica que se efectua, ùnicamente, operações *racionais* sobre as quantidades de x, $x^{m/n}, \ldots, x^{r/s}$.

Os símbolos $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots\right)$, $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, R (*sen* x, $\cos x$), etc., que empregaremos adiante, devem ser interpretados da mesma maneira. Por exemplo, $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ indica que se efectua operações racionais sobre $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

Resolução — O denominador comum das fracções $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ é 4. Façamos, por conseguinte, $x = t^4$, $dx = 4t^3\,dt$; então,

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{x^{\frac{3}{4}}+1} = 4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,t^3\,dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,dt = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt =$$

$$= 4\int t^2\,dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}\,dt = 4\,\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\,\mathrm{Log}\,|\,t^3+1\,| + C =$$

$$= \frac{4}{3}\,[x^{\frac{3}{4}} - \mathrm{Log}\,|\,x^{\frac{3}{4}}+1\,|\,] + C.$$

II. Consideremos agora os integrais do tipo

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx.$$

Efectuando a mudança de variável

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

reduz-se este integral ao duma fracção racional em que k designa o denominador comum das fracções $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

Exemplo — 2. Seja calcular o integral

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx.$$

Resolução — Façamos $x + 4 = t^2$, $x = t^2 - 4$, $dx = 2t\,dt$; então,

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}\,dt = 2\int \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right)dt = 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} =$$

$$= 2t + 2\,\mathrm{Log}\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2\,\mathrm{Log}\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C.$$

§ 12. Integrais do tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

Consideremos o integral

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx. \tag{1}$$

Este integral pode ser reduzido ao duma função racional pelas substituições de variáveis de Euler

1. *Primeira substituição de Euler*. Se $a > 0$, faz-se:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a}\, x + t.$$

Tomemos, para fixar ideias, o sinal mais antes de $\sqrt{a}$. Então,

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a}\, xt + t^2,$$

donde x é definido como uma função racional de t:

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\, t}$$

(dx é também uma função racional de t), por conseguinte,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\, x + t = \sqrt{a}\, \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}} + t,$$

isto é, que $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ é reduzida a uma função racional de t.

Visto que $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, x e dx se exprimem por funções racionais de t, o integral (1) é, pois, reduzido ao duma função racional de t.

Exemplo — 1. Seja calcular o integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + C}}.$$

Resolução — Visto que aqui $a = 1 > 0$, fazemos $\sqrt{x^2 + C} = -x + t$; então,

$$x^2 + C = x^2 - 2xt + t^2,$$

donde

$$x = \frac{t^2 - C}{2t}.$$

Por conseguinte,

$$dx = \frac{t^2 + C}{2t^2}\, dt,$$

$$\sqrt{x^2 + C} = -x + t = -\frac{t^2 - C}{2t} + t = \frac{t^2 + C}{2t}.$$

Voltando ao integral inicial, temos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + C}} = \int \frac{\frac{t^2 + C}{2t^2}\, dt}{\frac{t^2 + C}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \operatorname{Log} |t| + C_1 = \operatorname{Log} |x + \sqrt{x^2 + C}| + C_1$$

(ver a fórmula 14 do quadro de integrais).

2. *Segunda substituição de Euler.* Se $c > 0$, fazemos:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c};$$

então,

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c$$

(tomamos, para fixar ideias, o sinal mais antes da raíz), donde x é definido como uma função racional de t:

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t - b}{a - t^2}.$$

Visto que dx e $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ se exprimem igualmente por funções racionais de t, então substituindo os valores de $x, \sqrt{ax^2 + bx + c}$ e de dx em função de t no integral $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ reduz-se este último ao integral duma função racional de t.

Exemplo — 2. Seja calcular o integral

$$\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2 \sqrt{1 + x + x^2}}\, dx.$$

Resolução — Façamos $\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1$; então,

$$1 + x + x^2 = x^2t^2 + 2xt + 1; \quad x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}; \quad dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1 - t^2)^2}\, dt;$$

$$\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1 = \frac{t^2 - t + 1}{1 - t^2};$$

$$1 - \sqrt{1 + x + x^2} = \frac{-2t^2 + t}{1 - t^2}.$$

Substituindo as expressões assim obtidas no integral que desejamos calcular obtemos:

$$\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2 \sqrt{1 + x + x^2}}\, dx = \int \frac{(-2t^2 + t)^2 (1 - t^2)^2 (1 - t^2)(2t^2 - 2t + 2)}{(1 - t^2)^2 (2t - 1)^2 (t^2 - t + 1)(1 - t^2)^2}\, dx =$$

$$= +2 \int \frac{t^2}{1 - t^2}\, dt + C = -2t + \text{Log}\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right| + C =$$

$$= -\frac{2(\sqrt{1 + x + x^2} - 1)}{x} + \text{Log}\left|\frac{x + \sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x - \sqrt{1 + x + x^2} + 1}\right| + C =$$

$$= -\frac{2(\sqrt{1 + x + x^2} - 1)}{x} + \text{Log}\left|2x + 2\sqrt{1 + x + x^2} + 1\right| + C.$$

3. *Terceira substituição de Euler.* Sejam α e β as raízes reais do trinómio $ax^2 + bx + c$. Façamos:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)\, t.$$

Como $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, resulta:

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)\,t,$$
$$a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2 t^2,$$
$$a(x-\beta) = (x-\alpha)\,t^2;$$

x exprime-se, então, por uma função racional de t:

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}.$$

Dado que dx e $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ são igualmente funções racionais de t, o integral considerado, reduz-se, por consequência, ao duma função racional de t.

Nota — 1. A mudança de variáveis indicada na terceira substituição pode ser aplicada não sòmente quando $a < 0$, mas também quando $a > 0$, se sòmente o trinómio $ax^2 + bx + c$ tiver raízes reais.

Exemplo — 3. Seja calcular o integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

Resolução — Como $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$ façamos

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}=(x+4)\,t\,;$$

então,

$$(x+4)(x-1)=(x+4)^2 t^2, \quad x-1=(x+4)\,t^2,$$
$$x=\frac{1+4t^2}{1-t^2}, \quad dx=\frac{10t}{(1-t^2)^2}\,dt,$$
$$\sqrt{(x+4)(x-1)}=\left[\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right]t=\frac{5t}{1-t^2}.$$

Voltemos ao integral considerado; temos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int \frac{10t\,(1-t^2)}{(1-t^2)^2\,5t}\,dt=\int \frac{2}{1-t^2}\,dt=\operatorname{Log}\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$
$$=\operatorname{Log}\left|\frac{1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}}\right|+C=\operatorname{Log}\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+C.$$

Nota — 2. Notemos que as substituições de variáveis de Euler indicadas nos casos 1 e 3 bastam para que o integral (1) seja reduzido ao duma função racional. Com efeito, consideremos o trinómio $ax^2 + bx + c$. Se $b^2 - 4ac > 0$ as raízes do trinómio são reais, e

estamos, pois, em presença do caso 3. Se $b^2 - 4ac \leqslant 0$, temos, neste caso

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]$$

e, por conseguinte, o sinal do trinómio coincide com o de a. Para que $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ seja real, é preciso que o trinómio seja positivo e, partindo daí, que $a > 0$. Estamos, então, em presença do primeiro caso.

§ 13. Integração dos binómios diferenciais

Chama-se *binómio diferencial* à expressão

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

em que m, n, p, a, b são constantes.

Teorema — *O integral do binómio diferencial*

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx$$

pode ser reduzido, se m, n, p *forem números racionais, ao integral duma função racional, e, por conseguinte, pode ser expresso com o auxílio de funções elementares, nos três casos seguintes:*

1) *p é um número inteiro* (positivo, negativo ou nulo);
2) $\frac{m+1}{n}$ *é um número inteiro* (positivo, negativo ou nulo);
3) $\frac{m+1}{n} + p$ *é um número inteiro (positivo, negativo ou nulo).*

Demonstração — Façamos a mudança de variável

$$x = z^{\frac{1}{n}}, \qquad dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n} - 1} \, dz.$$

Então,

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx = \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n} - 1} (a + bz)^p \, dz =$$

$$= \frac{1}{n} \int z^q (a + bz)^p \, dz, \qquad (1)$$

em que

$$q = \frac{m+1}{n} - 1$$

1. p é um número inteiro, sendo q um número racional; designemo-lo por $\frac{r}{s}$. O integral (1), é, então, da forma

$$\int R(z^{\frac{r}{s}}, z)\,dz.$$

Indicámos no § 11, Cap. X, que um integral deste género pode ser reduzido ao integral duma função racional pela mudança de variável $z = t^s$.

2. $\frac{m+1}{n}$ é um número inteiro. Então, $q = \frac{m+1}{n} - 1$ é também um número inteiro, p é um número racional, pois, $p = \frac{\lambda}{\mu}$. O integral (1) está pois, reduzido a um integral da forma

$$\int R[z^q, (a+bz)^{\frac{\lambda}{\mu}}]\,dz.$$

Estudámos os integrais deste género no § 11, Cap. X. Pode-se reduzi-lo ao integral duma função racional, fazendo $a + bz = t^{\mu}$.

3. $\frac{m+1}{n} + p$ é um número inteiro. Mas, então, $\frac{m+1}{n} - 1 + p = q + p$ é também um número inteiro. Transformemos o integral (1):

$$\int z^q (a+bz)^p\,dz = \int z^{q+p}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz,$$

em que $q + p$ é um número inteiro, $p = \frac{k}{l}$ é um número racional. O integral obtido é, pois, da forma

$$\int R\left[z, \left(\frac{a+bz}{z}\right)^{\frac{k}{l}}\right] dz.$$

Este integral foi considerado no § 11, Cap. X. Ele pode ser reduzido ao integral duma função racional pela mudança de variável $\frac{a+bz}{z} = t^l$.

Consideremos exemplos destes três casos de integração.

Exemplo — 1.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,(1+\sqrt[3]{x^2})} = \int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\,dx.$$

Aqui $p = -1$ (número inteiro). Façamos $x^{\frac{2}{3}} = z$. O parêntesis torna-se, então, uma expressão linear de z:

$$\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\,dx = \int z^{-1}(1+z)^{-1}\frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}\,dz = \frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}\,dz.$$

Façamos agora $z^{\frac{1}{2}} = t$. Então, $z = t^2$, $dz = 2t\,dt$, e

$$\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{-1}\,dx = \frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}\,dz = \frac{3}{2}\int t^{-1}(1+t^2)^{-1}\,2t\,dt =$$

$$= 3\int \frac{dt}{1+t^2} = 3\,\text{arc tg}\,t + C = 3\,\text{arc tg}\,\sqrt{z} + C = 3\,\text{arc tg}\,\sqrt[3]{x} + C.$$

Exemplo — 2. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$

Aqui $m = 3$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} = 2$ (número inteiro). Façamos $x^2 = z$ então, $x = z^{\frac{1}{2}}$, $dx = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz$ e

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int z^{\frac{3}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{1}{2}\int z(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz.$$

Façamos $(1-z)^{1/2} = t$; o segundo parêntesis torna-se, então, uma função racional. Temos, com efeito, $1 - z = t^2$; $z = t^2 - 1$; $dz = 2t\,dt$. Por conseguinte,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int z(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{1}{2}\int (t^2-1)\,t^{-1}\,2t\,dt = \int (t^2-1)\,dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{t}{3}(t^2-3) + C = \frac{\sqrt{1-z}}{3}(-z-2) + C =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(-x^2-2) + C.$$

Exemplo — 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx.$

Aqui $m = -2$, $n = 2$, $p = -\frac{3}{2}$ e $\frac{m+1}{n} + p = -2$ (número inteiro). Transformemos a expressão entre parêntesis, numa função linear:

$$x^2 = z; \quad x = z^{\frac{1}{2}}; \quad dx = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\,dz;$$

$$\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \int z^{-1}(1+z)^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}(1+z)^{-\frac{3}{2}}\,dz = \frac{1}{2}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}}\,dz.$$

O primeiro factor é uma função racional. Para que o segundo factor o fique igualmente, façamos:

$$\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}}=t;$$

então,

$$\frac{1+z}{z}=t^2; \quad z=\frac{1}{t^2-1}; \quad dz=-\frac{2t\,dt}{(t^2-1)^2}.$$

Por conseguinte,

$$\int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int (t^2-1)^3\,t^{-3}\frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2}=-\int\frac{t^2-1}{t^2}dt=-t-\frac{1}{t}+C=$$

$$=-\left(\frac{1+z}{z}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{z}{1+z}\right)^{\frac{1}{2}}+C=-\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Nota — P. Tchébychev demonstrou que o integral dos binómios diferenciais de expoentes racionais não podem ser expressos por funções elementares a não ser nos três casos citados anteriormente (com a condição, bem entendido, de $a\neq 0$ e $b\neq 0$). Se nenhum dos números p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ for inteiro, este integral não pode ser expresso por funções elementares.

§ 14. Integração de certas classes de funções trigonométricas

Apenas estudamos até aqui os integrais das funções algébricas (racionais ou irracionais).

Neste parágrafo consideraremos a integração de certas classes de funções não algébricas, e, em primeiro lugar, a das funções trigonométricas. Seja um integral da forma

$$\int R(\operatorname{sen}x, \cos x)\,dx. \tag{1}$$

Mostremos que este integral pode ser sempre reduzido a um integral duma função racional pela mudança de variável

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t. \tag{2}$$

Exprimamos $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ em função de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ e partindo daí em função de t:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Além disso,

$$x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t, \qquad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Podemos, então, exprimir $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e dx por funções racionais de t. Uma função composta de funções racionais sendo uma função racional, substituindo as expressões assim obtidas no integral (1), reduzimo-la a um integral duma função racional:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int R\left[\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right] \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Exemplo — 1. Consideremos o integral

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}.$$

Em virtude das fórmulas precedentes, podemos escrever:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \operatorname{Log} |t| + C = \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

A mudança de variável considerada resolve o problema da integração de toda a expressão da forma $R(\cos x, \operatorname{sen} x)$. Eis porque é, por vezes, chamada «mudança de variável universal para a integração das expressões trigonométricas». Na realidade esta mudança de variável conduz frequentemente a funções racionais muito complicadas. Por esta razão, é, por vezes, preferível não utilizar a mudança de variável, mas recorrer a outros métodos que conduzam mais ràpidamente ao fim.

1) Se o integral é da forma $\int R(\operatorname{sen} x) \cos x\, dx$, a mudança de variável $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x\, dx = dt$ conduz-nos a um integral da forma $\int R(t)\, dt$.

2) Se o integral é da forma $\int R(\cos x) \operatorname{sen} x\, dx$, ele pode ser reduzido a um integral duma função racional pela mudança de variável $\cos x = t$, $\operatorname{sen} x\, dx = -dt$.

3) Se a função a integrar apenas depende de $\operatorname{tg} x$, efectuando a mudança de variável $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arc\,tg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, reduzimos o seu integral ao integral de uma função racional:

$$\int R(\operatorname{tg} x)\, dx = \int R(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

4) Se a função a integrar é da forma $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ em que $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ apenas figuram nas potências *pares*, empregaremos a mudança de variável:

$$\operatorname{tg} x = t, \tag{2'}$$

pois $\operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$ podem ser expressos por expressões racionais de $\operatorname{tg} x$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Depois de ter efectuado esta mudança de variável, obtemos o integral duma função racional.

Exemplo — 2. Calcular o integral

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x}\, dx.$$

Resolução — Este integral reduz-se fàcilmente a um integral da forma $\int R(\cos x) \operatorname{sen} x \, dx$.

Com efeito,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x} dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \sin x \, dx}{2+\cos x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x} \operatorname{sen} x \, dx.$$

Efectuemos a mudança de variável $\cos x = z$. Então, $\operatorname{sen} x \, dx = -dz$:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2+\cos x} dx = \int \frac{1-z^2}{2+z}(-dz) = \int \frac{z^2-1}{z+2} dz = \int \left(z-2+\frac{3}{z+2}\right) dz =$$

$$= \frac{z^2}{2} - 2z + 3 \operatorname{Log}(z+2) + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3 \operatorname{Log}(\cos x + 2) + C.$$

Exemplo — 3. Calcular $\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen}^2 x}$.

Efectuemos a mudança de variável $\operatorname{tg} x = t$:

$$\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

5) Consideremos, agora, um integral do tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) \, dx$, em que $R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$ (em que m e n são números inteiros). É preciso, aqui, considerar três casos.

a) $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$, em que pelo menos um dos números m e n é ímpar. Suponhamos, para fixar ideias, que n é ímpar. Façamos $n = 2p + 1$ e transformemos o integral:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2p+1} x \, dx = \int \operatorname{sen}^m x \cos^{2p} x \cos x \, dx =$$

$$= \int \operatorname{sen}^m x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^p \cos x \, dx.$$

Efectuemos a mudança de variável

$$\operatorname{sen} x = t, \qquad \cos x \, dx = dt.$$

Substituindo estas expressões no integral considerado, obtemos:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \int t^m (1-t^2)^p \, dt.$$

É o integral duma função racional de t.

Exemplo — 4.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x \, dx}{\operatorname{sen}^4 x} = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x \, dx}{\operatorname{sen}^4 x}.$$

Fazendo $\operatorname{sen} x = t$, $\cos x \, dx = dt$, temos:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x} dx = \int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C =$$

$$= -\frac{1}{3 \operatorname{sen}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x} + C.$$

b) $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$, em que m e n são números pares não negativos.

Façamos $m = 2p$, $n = 2q$. Escrevamos as fórmulas trigonométricas bem conhecidas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x. \tag{3}$$

Substituindo estas expressões no integral considerado, obtém-se:

$$\int \operatorname{sen}^{2p} x \cos^{2q} x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \times$$
$$\times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx.$$

Efectuando as operações indicadas, obtém-se um desenvolvimento segundo as potências pares e ímpares de $\cos 2x$. Os termos que contêm potências ímpares podem ser integrados como indicámos no caso *a*). No que respeita aos termos que contêm potências pares, aplicamos, sucessivamente, a fórmula (3), a fim de baixar o grau destas potências. Procedendo desta maneira, chega-se, finalmente, a termos da forma $\int \cos kx \, dx$ que se integra fàcilmente.

Exemplo — 5.

$$\int \operatorname{sen}^4 x \, dx = \frac{1}{2^2} \int (1 - \cos 2x)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left[x - \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x) \, dx\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{8}\right] + C.$$

c) Se os dois expoentes são pares e se um deles pelo menos é negativo, o método indicado no caso *b*) não tem efeito. É preciso, então, neste caso, fazer $\operatorname{tg} x = t$ (ou $\operatorname{cotg} x = t$).

Exemplo — 6.

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x \, dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^6 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 \, dx.$$

Façamos $\operatorname{tg} x = t$; então, $x = \operatorname{arc\,tg} t$, $dx = \frac{dt}{1 + t^2}$, e temos:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x} dx = \int t^2 (1 + t^2)^2 \frac{dt}{1 + t^2} = \int t^2 (1 + t^2) \, dt =$$
$$= \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

6) Consideremos, por fim, os integrais seguintes:

$$\int \cos mx \cos nx \, dx, \quad \int \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx, \quad \int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx.$$

Pode-se calculá-los utilizando as fórmulas (*) seguintes ($m \neq n$):

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x],$$

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

Subtituindo e integrando, obtém-se:

$$\int \cos mx \cos nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

Os dois outros integrais calculam-se duma maneira análoga.

Exemplo — 7.

$$\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 3x\, dx = \frac{1}{2}\int [-\cos 8x + \cos 2x]\, dx = -\frac{\operatorname{sen} 8x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C.$$

§ 15. Integração de certas funções irracionais com o auxílio de transformações trigonométricas

Voltemos ao integral considerado no § 12, Cap. X.

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx. \tag{1}$$

Vamos mostrar como este integral pode ser reduzido a um integral da forma

$$\int \bar{R}(\operatorname{sen} z, \cos z)\, dz \tag{2}$$

estudado na parágrafo anterior.

(*) Pode-se estabelecer, fàcilmente, estas fórmulas como se segue: $\cos(m+n)x = \cos mx \cos nx - \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx$, $\cos(m-n)x = \cos mx \cos nx + \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx$. Adicionando membro a membro e dividindo por dois, obtém-se a primeira das três fórmulas. Do mesmo modo, diminuindo membro a membro depois dividindo por dois, obtém-se a terceira fórmula. A segunda fórmula pode ser estabelecida da mesma maneira escrevendo os desenvolvimentos de $\operatorname{sen}(m+n)x$ e de $\operatorname{sen}(m-n)x$ depois somando as expressões correspondentes

Transformemos o trinómio que figura sob o sinal de raíz:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Façamos

$$x+\frac{b}{2a}=t,\ dx=dt.$$

Então,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Estudemos, separadamente, os diversos casos possíveis.

1. Seja $a>0$, $c-\frac{b^2}{4a}>0$. Façamos $a=m^2$, $c-\frac{b^2}{4a}=n^2$. Teremos, então, neste caso:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2+n^2}.$$

2. Seja $a>0$, $c-\frac{b^2}{4a}<0$. Então,

$$a=m^2,\ c-\frac{b^2}{4a}=-n^2.$$

Por conseguinte,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2-n^2}.$$

3. Seja $a<0$, $c-\frac{b^2}{4a}>0$. Então,

$$a=-m^2,\qquad c-\frac{b^2}{4a}=n^2.$$

Por conseguinte

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-m^2t^2}.$$

4. Seja $a<0$, $c-\frac{b^2}{4a}<0$. Neste caso, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ é uma quantidade complexa, qualquer que seja x.

O integral (1) pode, então, ser reduzido a um integral de um dos tipos seguintes:

$$\text{I.}\quad \int R\left(t,\sqrt{m^2t^2+n^2}\right)dt. \qquad (3.1)$$

$$\text{II.}\quad \int R\left(t,\sqrt{m^2t^2-n^2}\right)dt. \qquad (3.2)$$

$$\text{III.}\quad \int R\left(t,\sqrt{n^2-m^2t^2}\right)dt. \qquad (3.3)$$

É evidente que o integral (3.1) se reduz a um integral da forma (2), se se efectua a mudança de variável.

$$t = \frac{n}{m} \operatorname{tg} z.$$

O integral (3.2) reduz-se a um integral da forma (2), se se fizer

$$t = \frac{n}{m} \sec z.$$

O integral (3.2) reduz-se a um integral da forma (2), se se fizer

$$t = \frac{n}{m} \operatorname{sen} t.$$

Exemplo — Calcular o integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}.$$

Resolução — Este integral é do tipo III. Façamos $x = a \operatorname{sen} z$; então,

$$dx = a \cos z \, dz,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \int \frac{a \cos z \, dz}{\sqrt{(a^2-a^2 \operatorname{sen}^2 z)^3}} = \int \frac{a \cos z \, dz \text{ *)}}{a^3 \cos^3 z} =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} z + C = \frac{1}{a^2} \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} + C =$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{\operatorname{sen} z}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 z}} + C = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

§ 16. Funções cujos integrais não podem ser expressos por funções elementares

Indicámos no § 1, Cap. X (sem dar demonstração), que toda a função $f(x)$ contínua num intervalo (a, b) tem neste intervalo uma primitiva, isto é, que existe uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. Entretanto, *qualquer primitiva*, mesmo que ela exista, não se exprime por *combinações em número finito de funções elementares*.

Tais são, por exemplo, as primitivas expressas pelos integrais

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x} \, dx, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{Log} x}$$

bem como ainda outras.

(*) $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 z} = |\cos z|$, consideraremos, para fixar ideias, um único caso: $|\cos z| = \cos z$.

Em todos estes casos, a primitiva que não pode ser expressa por combinações em número finito de funções elementares representa, evidentemente, uma função duma natureza nova.

Por exemplo, as das primitivas

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C,$$

que se anula para $x = 0$, chama-se *função de Gauss* e designa-se pela notação $\Phi(x)$. Assim,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C_1,$$

se

$$\Phi(0) = 0.$$

Esta função está muito bem estudada. Existe quadros detalhados que dão os valores desta função para diversos valores de x. Veremos no § 21, Cap. XVI, como isto pode ser realizado.

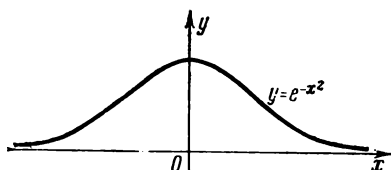
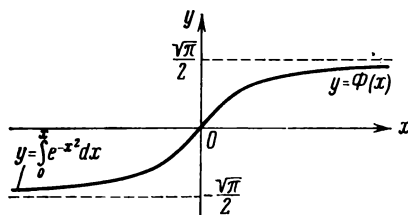



Fig. 204 Fig. 205

Os gráficos da função $y = e^{-x^2}$ e da função de Gauss $y = \Phi(x)$ estão representados nas figuras 204 e 205. Do mesmo modo, o das primitivas

$$\int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}\, dx + C \quad (k < 1),$$

que se anula para $x = 0$, chama-se «integral elíptico» e é designado pela notação $E(x)$,

$$E(x) = \int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}\, dx + C_2$$

se

$$E(0) = 0.$$

Existe, igualmente, quadros detalhados que dão o valor desta função para diversos valores de x.

Exercícios

I. **Calcular os integrais:**

1. $\int x^5\,dx$. **Resp.** $\frac{x^6}{6}+C$.

2. $\int (x+\sqrt{x})\,dx$. **Resp.** $\frac{x^2}{2}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$.

3. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$. **Resp.** $6\sqrt{x}-\frac{1}{10}x^2\sqrt{x}+C$.

4. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x}}$ **Resp.** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$.

5. $\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+2\right)dx$. **Resp.** $-\frac{1}{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}+2x+C$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$. **Resp.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$.

7. $\int \left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$. **Resp.** $\frac{x^5}{5}+\frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+C$.

Integração por mudança de variável:

8. $\int e^{5x}\,dx$. **Resp.** $\frac{1}{5}e^{5x}+C$.

9. $\int \cos 5x\,dx$. **Resp.** $\frac{\operatorname{sen} 5x}{5}+C$.

10. $\int \operatorname{sen} ax\,dx$. **Resp.** $-\frac{\cos ax}{a}+C$.

11. $\int \frac{\operatorname{Log} x}{x}\,dx$. **Resp.** $\frac{1}{2}\operatorname{Log}^2 x+C$.

12. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 3x}$ **Resp.** $-\frac{\operatorname{cotg} 3x}{3}+C$.

13. $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$. **Resp.** $\frac{\operatorname{tg} 7x}{7}+C$.

14. $\int \frac{dx}{3x-7}$. **Resp.** $\frac{1}{3}\operatorname{Log}|3x-7|+C$.

15. $\int \frac{dx}{1-x}$. **Resp.** $-\operatorname{Log}|1-x|+C$.

16. $\int \frac{dx}{5-2x}$. **Resp.** $-\frac{1}{2}\operatorname{Log}|5-2x|+C$.

17. $\int \operatorname{tg} 2x\,dx$. **Resp.** $-\frac{1}{2}\operatorname{Log}|\cos 2x|+C$.

18. $\int \operatorname{cotg}(5x-7)\,dx$. **Resp.** $\frac{1}{5}\operatorname{Log}|\operatorname{sen}(5x-7)|+C$.

19. $\int \frac{dy}{\operatorname{cotg} 3y}$. **Resp.** $-\frac{1}{3}\operatorname{Log}|\cos 3y|+C$.

20. $\int \operatorname{cotg}\frac{x}{3}\,dx$. **Resp.** $3\operatorname{Log}\left|\operatorname{sen}\frac{x}{3}\right|+C$.

21. $\int \operatorname{tg}\varphi\cdot\sec^2\varphi\,d\varphi$. **Resp.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi+C$.

22. $\int (\cot g\, e^x)\, e^x\, dx$. Resp. $\operatorname{Log} |\operatorname{sen} e^x| + C$.

23. $\int \left(\operatorname{tg} 4S - \cot g \frac{S}{4}\right) dS$. Resp. $-\frac{1}{4} \operatorname{Log} |\cos 4S| - 4 \operatorname{Log} \left| \operatorname{sen} \frac{S}{4} \right| + C$.

24. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$. Resp. $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$.

25. $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx$. Resp. $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$.

26. $\int \sqrt{x^2+1}\, x\, dx$. Resp. $\frac{1}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} + C$.

27. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2x^2+3}}$. Resp. $\frac{1}{2} \sqrt{2x^2+3} + C$.

28. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^3+1}}$. Resp. $\frac{2}{3} \sqrt{x^3+1} + C$.

29. $\int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x}$. Resp. $-\frac{1}{\operatorname{sen} x} + C$.

30. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\cos^3 x}$. Resp. $\frac{1}{2 \cos^2 x} + C$.

31. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$. Resp. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C$.

32. $\int \frac{\cot g\, x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$. Resp. $-\frac{\cot g^2 x}{2} + C$

33. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$. Resp. $2 \sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$.

34. $\int \frac{\operatorname{Log}(x+1)}{x+1} dx$. Resp. $\frac{\operatorname{Log}^2 (x+1)}{2} + C$.

35. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2 \operatorname{sen} x + 1}}$. Resp. $\sqrt{2 \operatorname{sen} x + 1} + C$.

36. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\, dx}{(1+\cos 2x)^2}$. Resp. $\frac{1}{2(1+\cos 2x)} + C$.

37. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\, dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$. Resp. $2 \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x} + C$.

38. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x + 1}}{\cos^2 x} dx$. Resp. $\frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{tg} x + 1)^3} + C$.

39. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{(2+3 \operatorname{sen} 2x)^3}$. Resp. $-\frac{1}{12} \frac{1}{(2+3 \operatorname{sen} 2x)^2} + C$.

40. $\int \frac{\operatorname{sen} 3x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$. Resp. $\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}} + C$.

41. $\int \frac{\operatorname{Log}^2 x\, dx}{x}$. Resp. $\frac{\operatorname{Log}^3 x}{3} + C$.

42. $\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Resp. $\frac{\operatorname{arc\,sen}^2 x}{2} + C$.

43. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x\, dx}{1+x^2}$. Resp. $\frac{\operatorname{arc\,tg}^2 x}{2} + C$.

44. $\int \frac{\text{arc cos}^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **Resp.** $-\frac{\text{arc cos}^3 x}{3}+C$.

45. $\int \frac{\text{arc cotg}\, x}{1+x^2}\,dx$. **Resp.** $-\frac{\text{arc cotg}^2 x}{2}+C$.

46. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$. **Resp.** $\frac{1}{2}\text{Log}\,(x^2+1)+C$.

47. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$. **Resp.** $\frac{1}{2}\text{Log}\,(x^2+2x+3)+C$.

48. $\int \frac{\cos x\,dx}{2\,\text{sen}\,x+3}$. **Resp.** $\frac{1}{2}\text{Log}\,(2\,\text{sen}\,x+3)+C$.

49. $\int \frac{dx}{x\,\text{Log}\,x}$. **Resp.** $\text{Log}\,|\,\text{Log}\,x\,|+C$.

50. $\int 2x\,(x^2+1)^4\,dx$. **Resp.** $\frac{(x^2+1)^5}{5}+C$.

51. $\int \text{tg}^4 x\,dx$. **Resp.** $\frac{\text{tg}^3 x}{3}-\text{tg}\,x+x+C$.

52. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\,\text{arc tg}\,x}$. **Resp.** $\text{Log}\,|\,\text{arc tg}\,x\,|+C$.

53. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\,(3\,\text{tg}\,x+1)}$. **Resp.** $\frac{1}{3}\text{Log}\,|\,3\,\text{tg}\,x+1\,|+C$.

54. $\int \frac{\text{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,dx$. **Resp.** $\frac{\text{tg}^4 x}{4}+C$.

55. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\text{arc sen}\,x}$. **Resp.** $\text{Log}\,|\,\text{arc sen}\,x\,|+C$.

56. $\int \frac{\cos 2x}{2+3\,\text{sen}\,2x}\,dx$. $\frac{1}{6}\text{Log}\,|\,2+3\,\text{sen}\,2x\,|+C$.

57. $\int \cos\,(\text{Log}\,x)\,\frac{dx}{x}$. **Resp.** $\text{sen}\,(\text{Log}\,x)+C$.

58. $\int \cos\,(a+bx)\,dx$. **Resp.** $\frac{1}{b}\,\text{sen}\,(a+bx)+C$.

59. $\int e^{2x}dx$. **Resp.** $\frac{1}{2}\,e^{2x}+C$.

60. $\int e^{\frac{x}{3}}\,dx$. **Resp.** $3e^{\frac{x}{3}}+C$.

61. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$. **Resp.** $e^{\sin x}+C$.

62. $\int a^{x^2}x\,dx$. **Resp.** $\frac{a^{x^2}}{2\,\text{Log}\,a}+C$.

63. $\int e^{\frac{x}{a}}\,dx$. **Resp.** $ae^{\frac{x}{a}}+C$.

64. $\int (e^{2x})^2\,dx$. **Resp.** $\frac{1}{4}\,e^{4x}+C$.

65. $\int 3^x e^x\,dx$. **Resp.** $\frac{3^x e^x}{\text{Log}\,3+1}+C$.

66. $\int e^{-3x}\,dx$. **Resp.** $-\frac{1}{3}\,e^{-3x}+C$.

67. $\int (e^{5x}+a^{5x})\,dx$. **Resp.** $\frac{1}{5}\left(e^{5x}+\frac{a^{5x}}{\text{Log}\,a}+C\right)$.

68. $\int e^{x^2+4x+3}\,(x+2)\,dx$. **Resp.** $\frac{1}{2}\,e^{x^2+4x+3}+C$.

69. $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$. Resp. $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - \left(\frac{b}{a}\right)^x}{\text{Log } a - \text{Log } b} - 2x + C$.

70. $\int \frac{e^x\, dx}{3 + 4e^x}$. Resp. $\frac{1}{4} \text{Log}(3 + 4e^x) + C$.

71. $\int \frac{e^{2x}\, dx}{2 + e^{2x}}$. Resp. $\frac{1}{2} \text{Log}(2 + e^{2x}) + C$.

72. $\int \frac{dx}{1 + 2x^2}$. Resp. $\frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc tg}(\sqrt{2}x) + C$.

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 3x^2}}$. Resp. $\frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc sen}(\sqrt{3}x) + C$.

74. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$. Resp. $\frac{1}{3} \text{arc sen} \frac{3x}{4} + C$.

75. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$. Resp. $\text{arc sen} \frac{x}{3} + C$.

76. $\int \frac{dx}{4 + x}$. Resp. $\frac{1}{2} \text{arc tg} \frac{x}{2} + C$.

77. $\int \frac{dx}{9x^2 + 4}$. Resp. $\frac{1}{6} \text{arc tg} \frac{3x}{2} + C$.

78. $\int \frac{dx}{4 - 9x^2}$. Resp. $\frac{1}{12} \text{Log} \left| \frac{2 + 3x}{2 - 3x} \right| + C$.

79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$. Resp. $\text{Log} \left| x + \sqrt{x^2 + 9} \right| + C$.

80. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 - a^2}}$. Resp. $\frac{1}{b} \text{Log} \left| bx + \sqrt{b^2x^2 - a^2} \right| + C$.

81. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 + a^2x^2}}$. Resp. $\frac{1}{a} \text{Log} \left| ax + \sqrt{b^2 + a^2x^2} \right| + C$.

82. $\int \frac{dx}{a^2x^2 - c^2}$. Resp. $\frac{1}{2ac} \text{Log} \left| \frac{ax - c}{ax + c} \right| + C$.

83. $\int \frac{x^2\, dx}{5 - x^6}$. Resp. $\frac{1}{6\sqrt{5}} \text{Log} \left| \frac{x^3 + \sqrt{5}}{x^3 - \sqrt{5}} \right| + C$.

84. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^4}}$. Resp. $\frac{1}{2} \text{arc sen } x^2 + C$.

85. $\int \frac{x\, dx}{x^4 + a^4}$. Resp. $\frac{1}{2a^2} \text{arc tg} \frac{x^2}{a^2} + C$.

86. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$ Resp. $\text{arc sen } e^x + C$.

87. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 5x^2}}$. Resp. $\frac{1}{\sqrt{5}} \text{arc sen} \sqrt{\frac{5}{3}}\, x + C$.

88. $\int \frac{\cos x\, dx}{a^2 + \text{sen}^2 x}$. Resp. $\frac{1}{a} \text{arc tg} \left(\frac{\text{sen } x}{a} \right) + C$.

89. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\text{Log}^2 x}}$. Resp. $\text{arc sen}(\text{Log}\, x)+C$.

90. $\int \frac{\text{arc cos}\, x - x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. Resp. $-\frac{1}{2}(\text{arc cos}\, x)^2 + \sqrt{1-x^2}+C$.

91. $\int \frac{x-\text{arc tg}\, x}{1+x^2}\, dx$. Resp. $\frac{1}{2}\text{Log}(1+x^2)-\frac{1}{2}(\text{arc tg}\, x)^2+C$.

92. $\int \frac{\sqrt{1+\text{Log}\, x}}{x}\, dx$. Resp. $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\text{Log}\, x)^3}+C$.

93. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$. Resp. $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+C$.

94. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$. Resp. $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$.

95. $\int \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}}$. Resp. $\text{arc tg}\, e^x+C$. 96. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{\text{sen}^2 x}}$. Resp. $3\sqrt[3]{\text{sen}\, x}+C$.

97. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\text{sen}\, 2x\, dx$. Resp. $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}+C$.

98. $\int \frac{\text{sen}\, 2x\, dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. Resp. $-2\sqrt{1+\cos^2 x}+C$.

99. $\int \frac{\cos^3 x}{\text{sen}^4 x}\, dx$. Resp. $\frac{1}{\text{sen}\, x}-\frac{1}{3\,\text{sen}^3 x}+C$.

100. $\int \frac{\sqrt[3]{\text{tg}^2 x}}{\cos^2 x}\, dx$. Resp. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\text{tg}^5 x}+C$.

101. $\int \frac{dx}{2\,\text{sen}^2 x+3\cos^2 x}$. Resp. $\frac{1}{\sqrt{6}}\,\text{arc tg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\text{tg}\, x\right)+C$.

Integrais do tipo $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\, dx$:

102. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$. Resp. $\frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{x+1}{2}+C$.

103. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$. Resp. $\frac{1}{\sqrt{11}}\,\text{arc tg}\,\frac{3x-1}{\sqrt{11}}+C$.

104. $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$. Resp. $\frac{1}{\sqrt{5}}\,\text{Log}\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right|+C$.

105. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$. Resp. $\frac{1}{4}\,\text{Log}\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C$.

106. $\int \frac{dz}{2z^2-2z+1}$. Resp. $\text{arc tg}(2z-1)+C$.

107. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$. Resp. $\frac{1}{\sqrt{5}}\,\text{arc tg}\,\frac{3x-1}{\sqrt{5}}+C$.

108. $\int \frac{(6x-7)\,dx}{3x^2-7x+11}$ Resp. $\text{Log}\,|3x^2-7x+11|+C.$

109. $\int \frac{(3x-2)\,dx}{5x^2-3x+2}$. Resp. $\frac{3}{10}\text{Log}\,(5x^2-3x+2)-\frac{11}{5\sqrt{31}}\text{arc tg}\,\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C.$

110. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx.$ Resp. $\frac{3}{2}\text{Log}\,(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

111. $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}\,dx.$ Resp. $\frac{2}{3}\text{Log}\,(3x-1)+\frac{1}{2}\text{Log}\,(2x+1)+C.$

112. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}\,dx.$ Resp. $\frac{1}{5}\text{Log}\,(5x^2-x+2)+\frac{8}{5\sqrt{39}}\text{arc tg}\,\frac{10x-1}{\sqrt{39}}+C.$

113. $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}\,dx.$ Resp. $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\text{Log}\,|2x^2-x+1|+$

$+\frac{1}{2\sqrt{7}}\text{arc tg}\,\frac{4x-1}{\sqrt{7}}+C.$

114. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+\text{sen}\,x\cos x+\text{sen}^2 x}$. Resp. $\frac{2}{\sqrt{7}}\text{arc tg}\,\frac{2\,\text{tg}\,x+1}{\sqrt{7}}+C.$

Integrais do tipo $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+C}}\,dx$:

115. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$. Resp. $\frac{1}{2}\text{arc sen}\,\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C.$

116. $\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$. Resp. $\text{Log}\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$

117. $\int \frac{dS}{\sqrt{2aS+S^2}}$. Resp. $\text{Log}\,|S+a+\sqrt{2aS+S^2}|+C.$

118. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$. Resp. $\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc sen}\,\frac{6x+7}{\sqrt{109}}+C.$

119. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$. Resp. $\frac{1}{\sqrt{3}}\text{Log}\,|6x+5+\sqrt{12x(3x+5)}|+C.$

120. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$. Resp. $\text{arc sen}\,\frac{2x+3}{\sqrt{17}}+C.$

121. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$. Resp. $\frac{1}{\sqrt{5}}\text{Log}\,|10x-1+\sqrt{20(5x^2-x-1)}|+C.$

122. $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+C}}\,dx.$ Resp. $2\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$

123. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$. Resp. $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3}+\frac{5}{4}\text{Log}\,|2x+1+$

$+\sqrt{4x^2+4x+3}\,|+C.$

124. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$. Resp. $-\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}+C$.

125. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$. Resp. $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\text{arc sen}\,\frac{2x-1}{2}+C$.

126. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}}\,dx$. Resp. $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-x}+\frac{23}{4\sqrt{2}}\,\text{Log}\,(4x-1+$
$+\sqrt{8(2x^2-x)})+C$.

II. Integração por partes:

127. $\int xe^x\,dx$. Resp. $e^x(x-1)+C$.

128. $\int x\,\text{Log}\,x\,dx$. Resp. $\frac{1}{2}x^2\left(\text{Log}\,x-\frac{1}{2}\right)+C$.

129. $\int x\,\text{sen}\,x\,dx$. Resp. $\text{sen}\,x-x\cos x+C$.

130. $\int \text{Log}\,x\,dx$. Resp. $x(\text{Log}\,x-1)+C$.

131. $\int \text{arc sen}\,x\,dx$. Resp. $x\,\text{arc sen}\,x+\sqrt{1-x^2}+C$.

132. $\int \text{Log}\,(1-x)\,dx$. Resp. $-x-(1-x)\,\text{Log}\,(1-x)+C$.

133. $\int x^n\,\text{Log}\,x\,dx$. Resp. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\text{Log}\,x-\frac{1}{n+1}\right)+C$.

134. $\int x\,\text{arc tg}\,x\,dx$. Resp. $\frac{1}{2}[(x^2+1)\,\text{arc tg}\,x-x]+C$.

135. $\int x\,\text{arc sen}\,x\,dx$. Resp. $\frac{1}{4}[(2x^2-1)\,\text{arc sen}\,x+x\sqrt{1-x^2}]+C$.

136. $\int \text{Log}\,(x^2+1)\,dx$. Resp. $x\,\text{Log}\,(x^2+1)-2x+2\,\text{arc tg}\,x+C$.

137. $\int \text{arc tg}\,\sqrt{x}\,dx$. Resp. $(x+1)\,\text{arc tg}\,\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$.

138. $\int \frac{\text{arc sen}\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. Resp. $2\sqrt{x}\,\text{arc sen}\,\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$.

139. $\int \text{arc sen}\,\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$. Resp. $x\,\text{arc sen}\,\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\text{arc tg}\,\sqrt{x}+C$.

140. $\int x\cos^2 x\,dx$. Resp. $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\,\text{sen}\,2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

141. $\int \frac{x\,\text{arc sen}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Resp. $x-\sqrt{1-x^2}\,\text{arc sen}\,x+C$.

142. $\int \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{(x^2+1)^2}\,dx$. Resp. $\frac{x}{4(1+x^2)}+\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}+C$.

143. $\int x \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}\,dx$. Resp. $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$.

144. $\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x^2}\,dx$. Resp. $\operatorname{Log}\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{1}{x}\operatorname{arc\,sen} x+C$.

145. $\int \operatorname{Log}(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$. Resp. $x\operatorname{Log}|x+\sqrt{1+x^2}|-\sqrt{1+x^2}+C$.

146. $\int \operatorname{arc\,sen} x\,\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. Resp. $\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$.

Nos exemplos seguintes, introduzir variáveis trigonométricas:

147. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$. Resp. $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}+C$.

148. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$. Resp. $2\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{4}x^3\sqrt{4-x^2}+C$.

149. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. Resp. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$.

150. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$. Resp. $\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$.

151. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. Resp. $\frac{x}{a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$.

Integração das fracções racionais:

152. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}\,dx$. Resp. $\operatorname{Log}\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+C$.

153. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$. Resp. $\frac{1}{8}\operatorname{Log}\frac{(x+3)^6}{(x+5)^5(x+1)}$.

154. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$. Resp. $\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{2}+4x+\operatorname{Log}\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$.

155. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$. Resp. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\operatorname{Log}\frac{(x-1)}{(x+1)^3}+\frac{16}{3}\operatorname{Log}(x+2)+C$.

156. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$. Resp. $\frac{1}{x-1}+\operatorname{Log}\frac{x-2}{x-1}+C$.

157. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$. Resp. $\frac{3}{x-2}+\operatorname{Log}\frac{(x-2)^2}{x^2}+C$.

158. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$. Resp. $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+\operatorname{Log}\frac{x^2}{(x+1)^2}+C$.

159. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$. Resp. $-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+\operatorname{Log}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+C$.

160. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$. Resp. $\operatorname{Log}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

161. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$. Resp. $\text{Log}\,\frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1}+\frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{x-1}{2}+C.$

162. $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$. Resp. $\text{Log}\,\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{2}-$

$-\frac{3}{\sqrt{2}}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

163. $\int \frac{dx}{x^3-1}$. Resp. $\frac{1}{6}\,\text{Log}\,\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

164. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}$. Resp. $\text{Log}\,\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{2}+C.$

165. $\int \frac{4\,dx}{x^4+1}$. Resp. $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{Log}\,\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}\,\text{arctg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$

166. $\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$. Resp. $\frac{1}{3}\,[x^3+\text{Log}\,(x^3-1)]+C.$

167. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$. Resp. $\frac{2-x}{4\,(x^2+2)}+\text{Log}\,(x^2+2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

168. $\int \frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2\,(x^2+1)^2}$. Resp. $\frac{3x^2-1}{(x-1)\,(x^2+1)}+\text{Log}\,\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\text{arc tg}\,x+C$

169. $\int \frac{dx}{(x^2-x)\,(x^2-x+1)^2}$. Resp. $\text{Log.}\,\frac{x-1}{x}-\frac{10}{3\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-$

$-\frac{2x-1}{3\,(x^2-x+1)}+C.$

Integração das funções irracionais:

170. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$. Resp. $\frac{4}{3}\,[\sqrt[4]{x^3}-\text{Log}\,(\sqrt[4]{x^3}+1)]+C.$

171. $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx$. Resp. $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C.$

172. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx$. Resp. $-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+$

$+2\,\text{Log}\,x-24\,\text{Log}\,(\sqrt[12]{x}+1)+C.$

173. $\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}\,dx$. Resp. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4}+4\sqrt[6]{x^3}-6\sqrt[6]{x^2}+$

$+6\sqrt[6]{x}-9\,\text{Log}\,(\sqrt[6]{x}+1)+\frac{3}{2}\,\text{Log}\,(\sqrt[6]{x^2}+1)+3\,\text{arc tg}\,\sqrt[6]{x}+C.$

174. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x^2}$. Resp. $\text{Log}\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C.$

175. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$. Resp. $2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \operatorname{Log} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + C$.

176. $\int \frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}\, dx$.

Resp. $14 \left[\sqrt[14]{x} - \frac{1}{2}\sqrt[7]{x} + \frac{1}{3}\sqrt[14]{x^3} - \frac{1}{4}\sqrt[7]{x^2} + \frac{1}{5}\sqrt[14]{x^5}\right] + C$.

177. $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\, dx$.

Resp. $\sqrt{3x^2-7x-6} + \frac{11}{2\sqrt{3}} \operatorname{Log}\left(x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x - 2}\right) + C$.

Integrais do tipo: $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$:

178. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$. Resp. $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Log} \left| \frac{\sqrt{x^2-x+3}-\sqrt{3}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right| + C$.

179. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$. Resp. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} \left| \frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right| + C$.

180. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$. Resp. $\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x-2}{x\sqrt{2}} + C$.

181. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\, dx$. Resp. $\sqrt{x^2+2x} + \operatorname{Log} \left| x+1+\sqrt{x^2+2x} \right| + C$.

182. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. Resp. $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} + C$.

183. $\int \sqrt{2x-x^2}\, dx$. Resp. $\frac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{2x-x^2} + \operatorname{arc\,sen}(x-1)\right] + C$.

184. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$. Resp. $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left| x+\sqrt{x^2-1} \right| + C$.

185. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$. Resp. $\operatorname{Log} \left| \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}} \right| + C$.

186. $\int \frac{(x+1)}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}\, dx$. Resp. $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} + C$.

187. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\, dx$. Resp. $\operatorname{Log} \left| \frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2} \right| + C$.

188. $\int \frac{\sqrt{x^2+4x}}{x^2}\, dx$. Resp. $-\frac{8}{x+\sqrt{x^2+4x}} + \operatorname{Log} \left| x+2+\sqrt{x^2+4x} \right| + C$.

Integração dos binómios diferenciais:

189. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$. Resp. $2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + C$.

190. $\int x^{\frac{1}{3}}(2+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}\,dx$. Resp. $\frac{10x^{\frac{2}{3}}-16}{15}(2+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{4}}+C$.

191. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Resp. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

192. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Resp. $-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\left(2x+\frac{1}{x}\right)+C$.

193. $\int \sqrt[4]{(1+x^{\frac{1}{2}})^3}\,dx$. Resp. $\frac{8}{77}(7\sqrt{x}-4)(1+\sqrt{x})^{\frac{7}{4}}+C$.

194. $\int \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. Resp. $\frac{2(4+3\sqrt[3]{x})(2-\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}}{5}$.

195. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$. Resp. $\frac{5x^3-3}{40}(1+x^3)^{\frac{5}{3}}$.

Integração das funções trigonométricas:

196. $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$. Resp. $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$.

197. $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$. Resp. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}+C$.

198. $\int \cos^4 x\operatorname{sen}^3 x\,dx$. Resp. $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C$.

199. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$. Resp. $\operatorname{cosec} x-\frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x+C$.

200. $\int \cos^2 x\,dx$. Resp. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+C$.

201. $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$. Resp. $\frac{3}{8}x-\frac{\operatorname{sen}2x}{4}+\frac{\operatorname{sen}4x}{32}+C$.

202. $\int \cos^6 x\,dx$. Resp. $\frac{1}{16}\left(5x+4\operatorname{sen}2x-\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{3}+\frac{3}{4}\operatorname{sen}4x\right)+C$.

203. $\int \operatorname{sen}^4 x\cos^4 x\,dx$. Resp. $\frac{1}{128}\left(3x-\operatorname{sen}4x+\frac{\operatorname{sen}8x}{8}\right)+C$.

204. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$. Resp. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\operatorname{Log}|\cos x|+C$.

205. $\int \operatorname{cotg}^5 x\,dx$. Resp. $-\frac{1}{4}\operatorname{cotg}^4 x+\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x+\operatorname{Log}|\operatorname{sen} x|+C$.

206. $\int \operatorname{cotg}^3 x\,dx$. Resp. $-\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2}-\operatorname{Log}|\operatorname{sen} x|+C$.

207. $\int \sec^8 x\, dx$. Resp. $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{3 \operatorname{tg}^5 x}{5} + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C.$

208. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^4 x\, dx$. Resp. $\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$

209. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. Resp. $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C.$

210. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$. Resp. $C - \operatorname{cosec} x.$

211. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x\, dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$. Resp. $\frac{3}{5} \cos^{\frac{5}{3}} x + 3 \cos^{-\frac{1}{3}} x + C.$

212. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x\, dx$. Resp. $-\frac{\operatorname{sen} 4x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C.$

213. $\int \cos 4x \cos 7x\, dx$. Resp. $\frac{\operatorname{sen} 11x}{22} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{6} + C.$

214. $\int \cos 2x \operatorname{sen} 4x\, dx$. Resp. $-\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$

215. $\int \operatorname{sen} \frac{1}{4} x \cos \frac{3}{4} x\, dx$. Resp. $-\frac{\cos x}{2} + \cos \frac{1}{2} x + C.$

216. $\int \frac{dx}{4 - 5 \operatorname{sen} x}$. Resp. $\frac{1}{3} \operatorname{Log} \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + C.$

217. $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$. Resp. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left| 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$

218. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1 + \operatorname{sen} x}$. Resp. $\frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + x + C.$

219. $\int \frac{\cos x\, dx}{1 + \cos x}$. Resp. $x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$

220. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x} dx$. Resp. $\operatorname{arc\,tg} (2 \operatorname{sen}^2 x - 1) + C.$

221. $\int \frac{dx}{(1 + \cos x)^2}$. Resp. $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} + C.$

222. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$. Resp. $-\frac{1}{2} \left[\operatorname{cotg} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) \right] + C.$

223. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$. Resp. $\sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) - x + C.$

Capítulo XI

INTEGRAL DEFINIDO

§ 1. Posição do problema. Somas integrais inferior e superior

Um forte meio de investigação em matemáticas, em física, em mecânica, assim como noutras disciplinas é fornecido pelo *integral definido*, umas das noções fundamentais da análise. O cálculo das áreas delimitadas por curvas, arcos, volumes, trabalho, velocidade, trajecto, momentos de inércia, etc., reduz-se ao cálculo dum integral definido.

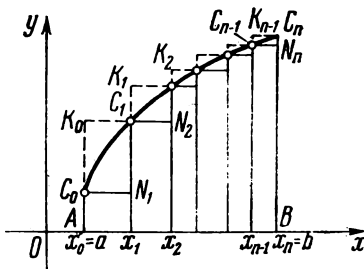
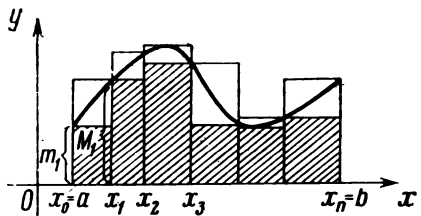



Fig. 206 Fig. 207

Seja $y = f(x)$ uma função *contínua* dada sobre o segmento $[a, b]$ (fig. 206 e 207). Sejam m e M, respectivamente, o seu menor e o seu maior valor sobre este segmento. Dividamos o segmento $[a, b]$ em n partes pelos pontos

$$a = x_0, \quad x_1, \quad x_2, \ldots, x_{n-1}, \quad x_n = b$$

com

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n,$$

e façamos

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1; \quad x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ldots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n.$$

Designemos o menor e o maior valor de $f(x)$

sobre o segmento $[x_0, \quad x_1]$ por m_1 e M_1,

sobre o segmento $[x_1, \quad x_2]$ por m_2 e M_2,

. . . .

sobre o segmento $[x_{n-1}, \quad x_n]$ por m_n e M_n.

Formemos as somas

$$s_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \qquad (1)$$

$$s_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i. \qquad (2)$$

A soma $\underline{s}_n$ chama-se *soma integral inferior* e $\overline{s}_n$, *soma integral superior*

Quando $f(x) \geqslant 0$, a soma integral inferior tem para valor numérico a área da figura em escada «inscrita» $AC_0N_1C_1N_2 \ldots C_{n-1}N_nBA$ e a soma integral superior, a área da figura em escada «circunscrita» $AK_0C_1K_1 \ldots C_{n-1}K_{n-1}C_nBA$.

Indiquemos algumas propriedades das somas integrais inferiores e superiores.

a) Dado que $m_i \leqslant M_i$ qualquer que seja i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, tem-se, em virtude das fórmulas (1) e (2):

$$\underline{s}_n \leqslant \overline{s}_n$$

(a igualdade correspondente a $f(x) = \text{const}$).

b) Dado que

$$m_1 \geqslant m, \quad m_2 \geqslant m, \ \ldots, \ m_n \geqslant m,$$

em que m é o menor valor de $f(x)$ sobre $[a, b]$, tem-se

$$\underline{s}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n \geqslant m \Delta x_1 + m \Delta x_2 + \ldots$$

$$\ldots + m \Delta x_n = m(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = m(b - a).$$

Assim,

$$s_n \geqslant m(b - a).$$

c) Dado que

$$M_1 \leqslant M, \quad M_2 \leqslant M, \ \ldots, \ M_n \leqslant M,$$

em que M é o maior valor de $f(x)$ sobre $[a, b]$, tem-se

$$s_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n \leqslant M \Delta x_1 + M \Delta x_2 + \ldots$$

$$\ldots + M \Delta x_n = M(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots$$

$$\ldots + \Delta x_n) = M(b - a).$$

Assim,

$$\overline{s}_n \leqslant M(b - a).$$

Reunindo as duas desigualdades obtidas, tem-se:

$$m(b - a) \leqslant \underline{s}_n \leqslant \overline{s}_n \leqslant M(b - a).$$

Quando $f(x) \geqslant 0$, a dupla desigualdade obtida admite uma interpretação geométrica simples (fig. 208), dado que os produtos $m(b-a)$

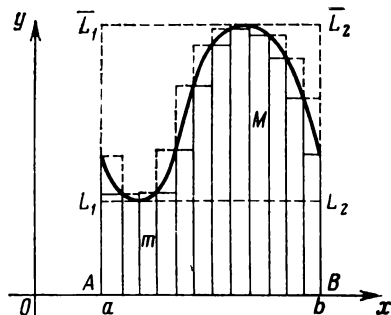



Fig. 208

e $M(b-a)$ representam, respectivamente, os valores numéricos das áreas do rectângulo «inscrito» AL_1L_2B e do rectângulo «circunscrito» $A\overline{L}_1\overline{L}_2B$.

§ 2. Integral definido

Continuemos o exame da questão do parágrafo anterior. Tomemos

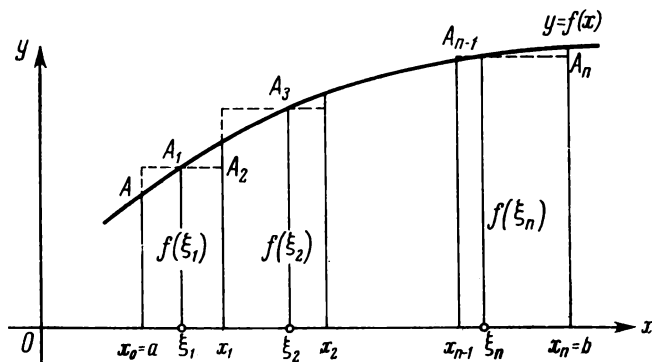



Fig. 209

um ponto sobre cada segmento $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, . . ., $[x_{n-1}, x_n]$ que designaremos, respectivamente, por ξ_1, ξ_2, ...,
. . ., ξ_n (fig. 209),

$$x_0 < \xi_1 < x_1, \quad x_1 < \xi_2 < x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

Sejam $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, ..., $f(\xi_n)$ os valores da função nestes pontos. Formemos a soma

$$s_n = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \qquad (1)$$

que se chama *soma integral* para a função $f(x)$ sobre o segmento $[a, b]$. Dado que, qualquer que seja ξ_i sobre o segmento $[x_{i-1}, x_i]$, se tem

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$$

e que $\Delta x_i > 0$, deduz-se

$$m_i\,\Delta x_i \leqslant f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant M_i\,\Delta x_i,$$

por conseguinte,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i.$$

ou

$$\underline{s}_n \leqslant s_n \leqslant \bar{s}_n. \qquad (2)$$

A interpretação geométrica desta última desigualdade é que, para $f(x) \geqslant 0$, a figura que tem s_n por área é delimitada por uma curva compreendida entre as curvas em escada «inscrita» e «circunscrita».

A soma s_n depende do modo de decomposição do segmento $[a, b]$ em segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ e da escolha dos pontos ξ_i sobre estes segmentos.

Designemos, agora, por máximo $[x_{i-1}, x_i]$ o comprimento do maior dos segmentos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, . . ., $[x_{n-1}, x_n]$. Consideremos diversos cortes do segmentos $[a, b]$ em segmentos parciais $[x_{i-1}, x_i]$ tais que máx $[x_{i-1}, x_i] \to 0$. É evidente que o número n de segmentos duma decomposição tende para o infinito. Pode-se formar para cada corte, escolhendo os valores correspondentes ξ_i, a soma integral

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

de maneira que se pode falar de cortes sucessivos e da série das somas integrais que lhes correspondem. Suponhamos que, para uma série de cortes dados, com máx $\Delta x_i \to 0$, esta soma (*) tende para um limite I.

Se para os cortes arbitrários do segmento $[a, b]$, tais que máx $\Delta x_i \to 0$, e para ξ_i quaisquer, a soma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ tende para um

(*) No caso dado, a soma é uma grandeza variável ordenada.

só e mesmo limite I, diz-se que a função $f(x)$ é *integrável* sobre o segmento $[a, b]$; o limite I chama-se integral definido da função $f(x)$ sobre o segmento $[a, b]$. Designa-se por $\int_a^b f(x)\,dx$ e escreve-se:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

O número a é o *limite inferior* do integral e b o *limite superior*. O segmento $[a, b]$ é o *segmento de integração*, x a *variável de integração*.

Indiquemos, sem o demonstrar, que *se a função* y = f(x) *é contínua sobre o segmento* [a, b], *ela é integrável sobre esse segmento*.

É evidente que se no decorrer dos cortes sucessivos para os quais $\max \Delta x_1 \to 0$ se verifica para a função contínua $f(x)$, a série das somas integrais inferiores s_n e das somas integrais superiores $\bar{s}_n$, constata-se, então que as somas tendem para o mesmo limite I, que é o integral definido de $f(x)$:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

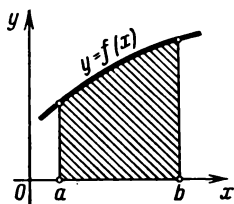



Fig. 210

Entre as funções descontínuas, encontra-se tanto funções integráveis como funções não integráveis.

Se se construir o gráfico da função sob o sinal soma (o sinal de integração) $y = f(x)$, quando, $f(x) \geqslant 0$ o integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é numèricamente igual à *área* do trapézio curvilíneo formado pela curva $y = f(x)$, pelas rectas $x = a$, $x = b$ e pelo eixo Ox (fig. 210).

Por conseguinte, calcular-se-à a área do trapézio curvilíneo formado pela curva $y = f(x)$, pelas rectas $x = a$, $x = b$ e pelo eixo Ox por meio do integral

$$Q = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Nota — 1. Notemos que o integral definido depende sòmente da função $y = f(x)$ e dos limites de integração, mas não da variável de integração, que é lícito designar por uma letra qualquer. Poder-se-á,

então, sem mudar o valor do integral definido, substituir a letra x por qualquer letra:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots = \int_a^b f(z)\,dz.$$

Quando introduzimos a noção de integral definido $\int_a^b f(x)\,dx$, suposemos $a < b$. Se $b < a$, tomar-se-á por definição

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{4}$$

Assim,

$$\int_5^0 x^2\,dx = -\int_0^5 x^2\,dx.$$

Enfim, se $a = b$, por-se-á, *por definição*, para toda a função $f(x)$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{5}$$

Isto é natural sob o ponto de vista geométrico. Com efeito, o comprimento da base do trapézio curvilíneo é nulo, e, portanto, também a sua área.

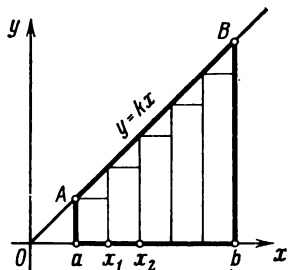



Fig. 211

Exemplo — 1. Calcular o integral

$$\int_a^b kx\,dx \ (b > a).$$

Resolução — Geomètricamente, o problema reside em calcular a área Q do trapézio formado pelas rectas $y = kx$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (fig. 211).

A função $y = kx$ debaixo do sinal soma é contínua. Por conseguinte, é-nos permitido no cálculo do integral definido, como se verificou anteriormente, cortar o segmento $[a, b]$ arbitràriamente e escolher ξ_k intermediários arbitrários.

O resultado do cálculo não depende do processo da construção da soma integral, desde que o maior dos segmentos parciais tenda para zero.

Dividamos o segmento $[a, b]$ em n partes iguais.

O comprimento Δx de cada segmento é $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, que se chama «limiar» da divisão. As abcissas dos pontos de divisão são:

$$a = x_0,\ x_1 = a + \Delta x,\ x_2 = a + 2\Delta x,\ \ldots,\ x_n = a + n\Delta x.$$

Tomemos para pontos ξ_k as extremidades esquerdas de cada segmento

$$\xi_1 = a,\ \xi_2 = a + \Delta x,\ \xi_3 = a + 2\Delta x,\ \ldots,$$
$$\xi_n = a + (n-1)\,\Delta x.$$

Formemos a soma integral (1). Deduz-se de $f(\xi_i) = k\xi_i$

$$s_n = k\xi_1\Delta x + k\xi_2\Delta x + \ldots + k\xi_n\Delta x =$$
$$= ka\Delta x + [k(a+\Delta x)]\,\Delta x + \ldots + \{k[a+(n-1)\,\Delta x]\}\,\Delta x =$$
$$= k\{a + (a+\Delta x) + (a+2\Delta x) + \ldots + [a+(n-1)\,\Delta x]\}\,\Delta x =$$
$$= k\{na + [\Delta x + 2\Delta x + \ldots + (n-1)\,\Delta x]\}\,\Delta x =$$
$$= k\{na + [1+2+\ldots+(n-1)]\,\Delta x\}\,\Delta x,$$

em que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Dado que

$$1+2+\ldots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(a soma duma progressão aritmética),

$$s_n = k\left[na + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{b-a}{n}\right]\frac{b-a}{n} = k\left[a + \frac{n-1}{n}\,\frac{b-a}{2}\right](b-a).$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = 1$, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = Q = k\left[a + \frac{b-a}{2}\right](b-a) = k\,\frac{b^2-a^2}{2}.$$

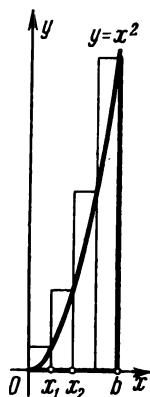
Assim,

$$\int_a^b kx\,dx = k\,\frac{b^2-a^2}{2}.$$

O cálculo da área $ABba$ (fig. 211) em geometria elementar é trivial. O resultado é o mesmo.

Exemplo — 2. Calcular $\int\limits_0^b x^2\,dx$.

Fig. 212

Resolução — O integral dado é igual à área Q do trapézio curvilíneo formado pela parábola $y = x^2$, as rectas $x = b$ e $y = 0$ (fig. 212).

Cortemos o segmento $[a, b]$ em n partes iguais pelos pontos:

$$x_0 = 0,\ x_1 = \Delta x,\ x_2 = 2\Delta x,\ \ldots,\ x_n = b = n\Delta x,$$
$$\Delta x = \frac{b}{n}.$$

Tomemos, para ξ_i, as extremidades direitas dos segmentos. Formemos a soma integral:

$$s_n = x_1^2\Delta x + x_2^2\Delta x + \ldots + x_n^2\Delta x =$$
$$= [(\Delta x)^2\,\Delta x + (2\Delta x)^2\,\Delta x + \ldots + (n\Delta x)^2\,\Delta x] =$$
$$= (\Delta x)^3\,[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2].$$

Como se sabe

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

então,

$$s_n=\frac{b^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n=Q=\int_0^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}.$$

Exemplo — 3. Calcular $\int_a^b m\,dx$ ($m=\text{const}$).

Resolução.

$$\int_a^b m\,dx=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i=\lim_{\max\Delta x_i\to 0} m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=$$

$$=m\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=m\,(b-a).$$

Aqui $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i$ é a soma dos comprimentos dos segmentos parciais que constituem o segmento $[a, b]$. Qualquer que seja o corte, esta soma é igual ao comprimento do segmento $b-a$.

Exemplo — 4. Calcular $\int_a^b e^x\,dx$.

Resolução — Dividamos de novo o segmento $[a, b]$ em n partes iguais:

$$x_0=a,\ x_1=a+\Delta x,\ \ldots,\ x_n=a+n\Delta x;$$

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}.$$

Tomemos para pontos ξ_i as extremidades esquerdas. Formemos a soma integral:

$$s_n=e^a\Delta x+e^{a+\Delta x}\Delta x+\ldots+e^{a+(n-1)\Delta x}\Delta x=$$

$$=e^a\left(1+e^{\Delta x}+e^{2\Delta x}+\ldots+e^{(n-1)\Delta x}\right)\Delta x.$$

A expressão entre parêntesis é uma progressão geomérica de razão Δx de primeiro termo 1, logo,

$$s_n=e^a\,\frac{e^{n\Delta x}-1}{e^{\Delta x}-1}\,\Delta x=e^a\left(e^{n\Delta x}-1\right)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}.$$

Tem-se, em seguida:

$$n\Delta x = b - a; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = 1.$$

Segundo a regra de L'Hospital, $\lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{e^z} = 1.$) Por conseguinte,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = Q = e^a (e^{b-a} - 1) \cdot 1 = e^b - e^a,$$

isto é,

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a.$$

Nota — 2. Os exemplos dados mostram que o cálculo dos integrais definidos no que respeita a somas integrais está sujeito a dificuldades consideráveis. Mesmo quando as funções a integrar são muito simples (kx, x^2, e^x), este processo exige cálculos fastidiosos. Os cálculos tornam-se inextricáveis quando se trata de funções mais complicadas. É, então, natural procurar um método prático de cálculo dos integrais definidos. Este método, devido a Newton e a Leibniz, utiliza o elo profundo entre a integração e a derivação. Os parágrafos seguintes do presente capítulo têm por objecto a exposição dos fundamentos deste método.

§ 3. Propriedades fundamentais do integral definido

Propriedade — 1. *Pode-se retirar um factor constante de debaixo do sinal soma: se* A = *const.*,

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Demonstração.

$$\int_a^b Af(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} Af(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= A \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = A\int_a^b f(x)\,dx.$$

Propriedade — 2. *O integral definido da soma algébrica de várias funções é igual à soma algébrica dos integrais das funções.*

Assim, no caso de duas funções

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{2}$$

Demonstração.

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^n [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)]\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x \to 0} \left[\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\,\Delta x_i\right] =$$

$$= \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\,\Delta x_i + \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

A demonstração é válida para um número arbitrário de funções.

As propriedades 1 e 2, demonstradas para o caso $a < b$, subsistem para $a \geqslant b$.

Todavia, a propriedade seguinte não tem lugar a não ser para $a < b$:

Propriedade — 3. *Se sobre o segmento* [a, b], (a < b), *as funções* f (x) *e* φ (x) *satisfazem à condição* f (x) $\leqslant \varphi$ (x), *tem-se*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{3}$$

Demonstração — Consideremos a diferença

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx =$$

$$= \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^n [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)]\,\Delta x_i.$$

Tem-se $\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \geqslant 0$, $\Delta x_i \geqslant 0$. Então, cada um dos termos é positivo ou nulo, e do mesmo modo a soma e o seu limite:

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx \geqslant 0$$

ou

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0,$$

donde se deduz a desigualdade (3).

Se $f(x) > 0$ e $\varphi(x) > 0$, a fig. 213 dá uma ilustração geométrica desta propriedade. Resulta de $\varphi(x) \geqslant f(x)$ que a área do trapézio curvilíneo aA_1B_1b não é superior à do trapézio aA_2B_2b.

Propriedade — 4. *Sendo* m *e* M, *respectivamente, o menor e o maior valor de* f(x) *sobre o segmento* [a, b] *e* a ⩽ b, *tem-se*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{4}$$

Demonstração — Tem-se, por hipótese,

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Deduz-se da propriedade (3):

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx. \tag{4'}$$

Ora,

$$\int_a^b m\,dx = m(b-a), \qquad \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

(ver exemplo 3, § 2, Cap. XI). Substituindo estas expressões na desigualdade (4'), obtém-se a desigualdade (4).

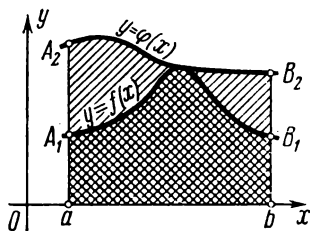



Fig. 213

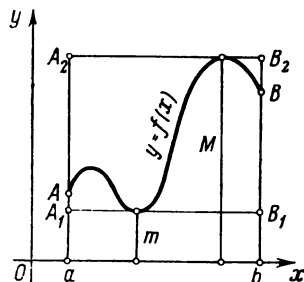



Fig. 214

Quando $f(x) \geqslant 0$, esta condição está ilustrada geomètricamente pela fig. 214: a área do trapézio curvilíneo $aABb$ está empreendida entre as áreas dos rectângulos aA_1B_1b e aA_2B_2b.

Propriedade — 5. (Teorema da média). *Sendo a função* f(x) *contínua sobre o segmento* [a, b], *existe sobre este segmento um ponto* ξ *tal que se tem:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi). \tag{5}$$

Demonstração — Seja, para fixar ideias, $a < b$. Se m e M são, respectivamente, o menor e o maior valor de $f(x)$ sobre $[a, b]$, tem-se, em virtude da fórmula (4),

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Donde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu, \quad \text{où} \quad m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Sendo $f(x)$ contínua, toma todos os valores compreendidos entre m e M. Ter-se-á, então, para um certo valor ξ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$ $\mu = f(\xi)$, ou seja

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Propriedade — 6. *Sendo* a, b, c *três números arbitrários, tem-se*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

desde que estes três integrais existam.

Demonstração — Suponhamos, primeiramente, que $a < c < b$ e formemos a soma integral para a função $f(x)$ sobre $[a, b]$.

Dado que o limite das somas integrais não depende do modo de corte de $[a, b]$, cortaremos $[a, b]$ em segmentos parciais de modo que c seja um ponto de divisão. Decomponhamos, em seguida, a soma integral $\sum_a^b$, correspondente ao segmento $[a, b]$ em duas somas $\sum_c^b$ e $\sum_a^c$ correspondentes, respectivamente, aos segmentos $[a, c]$ e $[c, b]$. Tem-se, nestas condições

$$\sum_a^b f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i)\,\Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Passando a limite quando $\max \Delta x_i \to 0$, obtém-se a relação (6). Se $a < b < c$, pode-se escrever, em virtude do que precede:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

ou

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx;$$

mas, em virtude da fórmula (4) do § 2:

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx,$$

por conseguinte,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Demonstra-se, duma maneira análoga, esta propriedade para uma disposição qualquer dos pontos a, b e c.

A figura 215 ilustra a propriedade 6 no caso em que $f(x) > 0$ e $a < c < b$; a área do trapézio $aABb$ é a soma das áreas dos trapézios $aACc$ e $cCBb$.

Fig. 215

§ 4. Cálculo do integral definido. Fórmula de Newton-Leibniz

No integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

fixemos o limite inferior a e façamos variar o limite superior b. O valor do integral variará, por conseguinte, isto é, que o integral será uma *função do seu limite superior*.

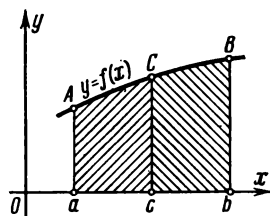
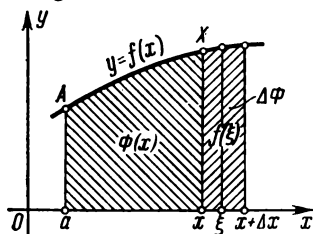
Designemos o limite superior por x para voltar às notações familiares e, para evitar qualquer confusão, designemos a variável de integração por t. (O valor do integral não depende da designação da variável de integração). Tem-se o integral $\int_a^x f(t)\,dt$.

Fig. 216

Sendo a constante, este integral é uma função do seu limite superior x. Seja $\Phi(x)$ esta função:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \qquad (1)$$

Se a função $f(t)$ for não negativa, $\Phi(x)$ é, numèricamente, igual à área do $aAXx$ (fig. 216). É evidente que esta área varia com x.

Determinemos a derivada de $\Phi(x)$ em relação a x, isto é, a derivada do integral (1) em relação ao seu limite superior.

Teorema — 1. *Sendo* f (x) *uma função contínua e se se faz*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Por outras palavras, *a derivada dum integral definido em relação ao seu limite superior é igual à função debaixo do sinal de soma na qual a variável de integração foi substituída pelo valor do limite superior* (sob a condição de a função debaixo do sinal soma ser contínua).

Demonstração — Dando à variável x um acréscimo arbitrário Δx positivo ou negativo, tem-se (tendo em atenção a propriedade 6 do integral definido):

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

O acréscimo da função $\Phi(x)$ é igual a

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) =$$

$$= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt,$$

ou seja

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Apliquemos a este último integral o teorema da média (propriedade 5).

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\,\Delta x,$$

em que ξ está compreendido entre x e $x + \Delta x$.

Formemos o quociente do acréscimo da função pelo acréscimo da variável:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\,\Delta x}{\Delta x} = f(\xi).$$

Por conseguinte,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi).$$

Mas como $\xi \to x$ quando $\Delta x \to 0$, tem-se

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = \lim_{\xi\to x} f(\xi),$$

e como $f(x)$ é contínua

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

Tem-se, pois, $\Phi'(x) = f(x)$ e o teorema está demonstrado.

Este teorema admite uma ilustração geométrica simples (fig. 216): o acréscimo $\Delta\Phi = f(\xi)\,\Delta x$ é igual à área do trapézio curvilíneo de base Δx e a derivada $\Phi'(x) = f(x)$ é igual ao comprimento do segmento xX.

Nota — Resulta, especialmente do teorema demonstrado, que *toda a função contínua admite uma primitiva.* Com efeito, se a função $f(x)$ é contínua sobre o segmento $[a, x]$, como foi indicado no § 2, Cap. XI, o integral $\int_a^x f(t)\,dt$ existe, isto é, que existe a função

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

que é, como se demonstrou em cima, uma primitiva de $f(x)$.

Teorema — 2. *Sendo* F (x) *uma primitiva da função contínua* f (x), tem-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Esta fórmula chama-se a *fórmula de Newton-Leibniz* (*).

Demonstração — Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$.

Segundo o teorema 1, a função $\int_a^x f(t)\,dt$ é também uma primitiva de $f(x)$. Ora, duas primitivas arbitrárias duma dada função distinguem-se por uma constante C^*. Pode-se escrever, por conseguinte,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C^*. \tag{3}$$

Sendo C^* adequadamente escolhido, esta igualdade é verdadeira para todos os x; é, então, uma identidade. Para determinar a constante C^*, façamos nesta identidade $x = a$; então,

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C^*,$$

(*) Notemos que este chamamento da fórmula (2) é convencional, porque nem Newton nem Leibnitz deram, explìcitamente, esta fórmula. Mas é importante sublinhar que foram, precisamente, Leibniz e Newton, quem primeiramente estabeleceram o elo de ligação entre a integração e a derivação que permitiu enunciar uma regra de cálculo dos integrais definidos.

ou

$$0 = F(a) + C^*,$$

logo,

$$C^* = -F(a).$$

Por conseguinte,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Fazendo $x = b$, obtém-se a fórmula de Newton-Leibniz:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

ou, voltando à variável de integração x,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Notemos que a diferença $F(b) - F(a)$ não depende da escolha da primitiva F, porque todas as primitivas se distinguem umas das outras por uma constante que desaparece na subtracção..

Introduzindo a notação (*).

$$F(b) - F(a) = F(x)\,\Big|_a^b,$$

pode-se pôr a fórmula (2) sob a forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

A fórmula de Newton-Leibniz fornece um meio de cálculo prático dos integrais definidos quando se conhece uma primitiva da função a integrar. É a descoberta desta fórmula que conferiu ao integral definido o alcance que ele tem hoje em matemáticas. Se bem que um processo análogo de cálculo do integral definido no que respeita ao limite duma soma integral fosse já conhecido na Antiguidade (Arquimedes), as aplicações deste método eram limitadas, todavia, aos casos mais simples em que o limite da soma integral podia ser calculado directamente. A fórmula de Newton-Leibniz ampliou consideràvelmente o domínio da aplicação do integral definido, tendo os matemáticos

---

(*) Utiliza-se as duas transcrições equivalentes

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

e

$$F(b) - F(a) = F(x)\,\Big|_a^b.$$

Utilizaremos, em seguida, indiferentemente uma ou outra transcrição.

recebido um método geral que permitiu resolver diferentes problemas particulares, e daí resultou um alargamento considerável da esfera das aplicações do integral definido em técnica, em mecânica, em astronomia, etc.

Exemplo — 1.

$$\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Exemplo — 2.

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Exemplo — 3.

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1).$$

Exemplo — 4.

$$\int_a^b e^x\,dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a.$$

Exemplo — 5.

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0.$$

Exemplo — 6.

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

§ 5. Mudança de variável 'num integral definido

Teorema — *Seja dado o integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

em que f (x) *é contínua sobre o segmento* [a, b].

Introduzamos a nova variável t *pela fórmula*

$$x = \varphi(t).$$

Se

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,

2) $\varphi(t)$ e $\varphi'(t)$ *são contínuas sobre o segmento* $[\alpha, \beta]$,

3) $f[\varphi(t)]$ *é definida e contínua sobre* $[\alpha, \beta]$, então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

Demonstração — Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, pode-se escrever as igualdades seguintes:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{2}$$

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)] + C \tag{3}$$

de que se verifica a legitimidade derivando os dois membros em relação a t. (Ela resulta também da fórmula (2), § 4, Cap. X.) Deduz-se da igualdade (2):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

e da igualdade (3):

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta =$$

$$= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

Os segundos membros destas igualdades são iguais e, por conseguinte, os primeiros são-no também, c. q. d.

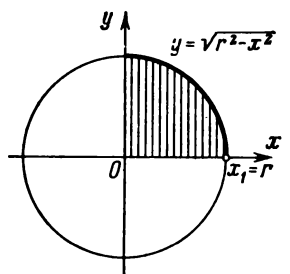



Fig. 217

Nota — No cálculo do integral definido pela aplicação da fórmula (1) não voltamos à antiga variável. Os valores numéricos dos dois integrais da igualdade (1) são iguais.

Exemplo — Calcular o integral

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Resolução — Façamos a mudança de variável;

$$x = r \operatorname{sen} t, \qquad dx = r \cos t \, dt.$$

Determinemos os novos limites:

$$x = 0 \text{ pour } t = 0,$$

$$x = r \text{ pour } t = \frac{\pi}{2}.$$

Por conseguinte,

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 t} \, r \cos t \, dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t \, dt =$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Geomètricamente, calculámos a área do quarto de círculo $x^2 + y^2 = r^2$ (fig. 217).

§ 6. Integração por partes

Sejam u e v duas funções de x deriváveis. Tem-se

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Integrando os dois membros desta identidade de a a b, obtém-se:

$$\int_a^b (uv)' \, dx = \int_a^b u'v \, dx + \int_a^b uv' \, dx. \tag{1}$$

Dado que $\int (uv)' \, dx = uv + C$, tem-se $\int_a^b (uv)' \, dx = uv \Big|_a^b$; pode-se, então, escrever a igualdade (1) sob a forma

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b v \, du + \int_a^b u \, dv,$$

ou, finalmente,

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

Exemplo — Calcular o integral $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x \, dx$.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{n-1} x \text{ sen } x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\text{sen}^{n-1} x}_{u} \, \underbrace{d \cos x}_{dv} =$$

$$= -\text{sen}^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{n-2} x \cos x \cos x \, dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{n-2} x \cos^2 x \, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{n-2} x \, (1 - \text{sen}^2 x) \, dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x \, dx.$$

Com as notações escolhidas, pode-se tornar a copiar a última igualdade sob a forma

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

donde se obtém:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{2}$$

Obtém-se, do mesmo modo:

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4},$$

e, então,

$$I_n = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}.$$

Continuando assim, chega-se até I_0 ou I_1, segundo a pariedade de n. Examinemos os dois casos:

1) n é par, $n = 2m$:

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0;$$

2) n é ímpar, $n = 2m + 1$:

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1,$$

mas

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2}$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx=1,$$

logo,

$$I_{2m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m} x\,dx=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m+1} x\,dx=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}.$$

Destas duas fórmulas resulta a fórmula de Wallis, que exprime $\frac{\pi}{2}$ sob a forma de produto infinito.

Com efeito, deduz-se destas duas últimas fórmulas, dividindo membro a membro:

$$\frac{\pi}{2}=\left(\frac{2\cdot4\cdot6\ldots 2m}{3\cdot5\ldots(2m-1)}\right)^2\frac{1}{2m+1}\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}. \tag{3}$$

Mostremos agora que,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}=1.$$

Tem-se, qualquer que seja x no intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$\operatorname{sen}^{2m-1} x>\operatorname{sen}^{2m} x>\operatorname{sen}^{2m+1} x.$$

Integrando de 0 a $\frac{\pi}{2}$, obtém-se

$$I_{2m-1}\geqslant I_{2m}\geqslant I_{2m+1},$$

donde

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}}\geqslant\frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}\geqslant 1. \tag{4}$$

Resulta da igualdade (2):

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}}=\frac{2m+1}{2m}.$$

Por conseguinte,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{2m+1}{2m}=1.$$

Deduz-se da desigualdade (4):

$$\lim_{m\to\infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1.$$

Passando ao limite em (3), obtém-se a *fórmula de Wallis*:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \left[\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2m}{3\cdot 5 \ldots (2m-1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \right].$$

Pode-se tornar a copiar esta fórmula sob a forma:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1} \right).$$

§ 7. Alargamento da noção de integral

1. *Integrais com limites infinitos.*

Seja $f(x)$ uma função definida e contínua para todos os x tais que $a \leqslant x < +\infty$. Consideremos o integral

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Este integral tem um sentido para todo $b > a$. Quando b varia, o integral varia, ele é uma função contínua de b (ver § 4, Cap. XI). Estudemos o comportamento deste integral quando $b \to +\infty$ (fig. 218).

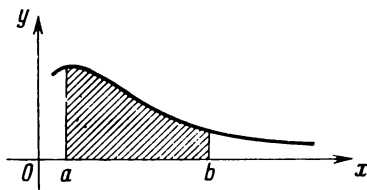



Fig. 218

Definição — Quando o limite seguinte

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

existe, representa-se-lo por

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Tem-se, por definição,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Diz-se, ainda, que o integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *existe* ou *converge* (*).

Se $\int_a^b f(x)\,dx$ não tem limite finito quando $b \to +\infty$, diz-se que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *não existe* ou *diverge*.

É fácil de ver qual é o sentido geométrico do integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ quando $f(x) \geqslant 0$: se o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ representa a área do domí-

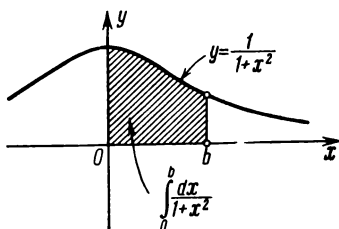
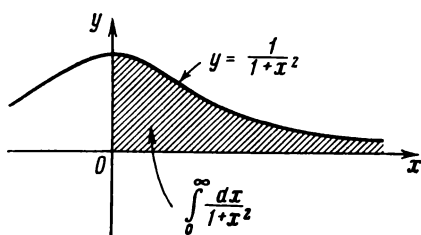



Fig. 219 Fig. 220

nio delimitado pela curva $y = f(x)$, o eixo das abcissas e as rectas $x = a$, $x = b$, é natural dizer-se que o integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ exprime a área do domínio infinito compreendido entre as curvas $y = f(x)$, $x = a$ e o eixo dos x.

Define-se, duma maneira análoga, os integrais noutros intervalos infinitos:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Esta última igualdade deve ser compreendida como se segue: se cada um dos integrais do segundo membro existe, dir-se-á que o integral do primeiro membro existe (converge).

Exemplo — 1. Calcular o integral $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (ver fig. 219 e 220).

Resolução — Tem-se, por definição,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arc\,tg} b = \frac{\pi}{2}.$$

(*) Chama-se, também, por vezes *integral impróprio*.

O integral considerado exprime a área do domínio infinito tracejado na figura 220.

Exemplo — 2. Discutir os valores de α para os quais o integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

converge ou diverge (fig. 221).

Resolução — Dado que (para $\alpha \neq 1$)

Fig. 221

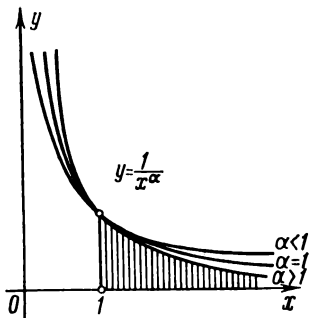
$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}[b^{1-\alpha} - 1],$$

tem-se

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1).$$

Por conseguinte,

se $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$, o integral converge;

se $\alpha < 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$, integral diverge.

Quando $\alpha = 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \operatorname{Log} x \Big|_1^{+\infty} = \infty$, o integral diverge.

Exemplo — 3. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Resolução.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

O segundo integral é igual a $\frac{\pi}{2}$ (ver o exemplo 1). Calculemos o primeiro integral:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x \Big|_\alpha^0 =$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty} (\operatorname{arc\,tg} 0 - \operatorname{arc\,tg} \alpha) = \frac{\pi}{2}.$$

Por conseguinte,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Em muitos casos, basta estabelecer que o integral dado converge ou diverge e avaliar o seu valor. É útil basear-se, para este efeito, nos teoremas seguintes que limitar-nos-emos a enunciar e dos quais mostraremos as aplicações nos exemplos.

Teorema — 1. *Se, qualquer que seja* x ($x \geqslant a$), *se tem a desigualdade* $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$ *e se* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ *converge,* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge também e*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Exemplo — 4. Estudar a convergência do integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

Resolução — Notemos que para $1 \leqslant x$

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}.$$

Seguidamente,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1.$$

Logo,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

converge e é inferior à unidade.

Teorema — 2. *Se, qualquer que seja* x ($x \geqslant a$), *se tem a desigualdade* $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x)$ *e se* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ *diverge, o integral* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge também.*

Exemplo — 5. Estudar a convergência do integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx.$$

Verifica-se que

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Ora,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to +\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = +\infty.$$

Por conseguinte, o integral dado diverge.

Os dois teoremas anteriores respeitavam aos integrais de domínios de integração infinitos, não sendo negativa a função sob o sinal soma. Quando se integra num domínio infinito uma função f(x) de sinal variável, tem-se o teorema seguinte.

Teorema — 3. *Se o integral* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ *converge, o mesmo sucede a* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

Diz-se, então, que este último integral é *absolutamente convergente.*

Exemplo — 6. Estudar a convergência do integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\, dx.$$

Resolução — Aqui, a função a integrar é de sinal variável. Tem-se,

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x^3}\right|. \text{ Mais } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Por conseguinte, o integral $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\right| dx$ converge. Daí resulta a convergência do integral dado.

2. *Integral duma função descontínua.*

Seja $f(x)$ uma função definida e contínua quando $a \leqslant x < c$, não sendo a função definida no ponto $x = c$, ou, melhor ainda, tendo uma descontinuidade. Pode-se definir, então, $\int_a^c f(x)\, dx$ como limite de somas integrais, não sendo $f(x)$ contínua sobre o segmento $[a, c]$ e podendo este limite não existir.

Define-se, como se segue, o integral $\int_a^c f(x)\, dx$ duma função $f(x)$ *descontínua no ponto c:*

$$\int_a^c f(x)\, dx = \lim_{b \to c-0} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Este integral diz-se *convergente* quando o limite do segundo membro existe, e *divergente* no caso contrário.

Se a função $f(x)$ tem uma descontinuidade na extremidade esquerda do segmento $[a, c]$ (isto é, para $x = a$), põe-se, por definição,

$$\int_a^c f(x)\, dx = \lim_{b \to a+0} \int_b^c f(x)\, dx.$$

Se $f(x)$ tem uma descontinuidade num ponto $x = x_0$ no *interior* do segmento $[a, c]$, põe-se

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^c f(x)\,dx,$$

quando os dois integrais do segundo membro existem.

Exemplo — 7. Calcular

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Resolução.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1-0} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= -\lim_{b\to 1-0} 2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^b = -\lim_{b\to 1-0} 2[\sqrt{1-b}-1] = 2.$$

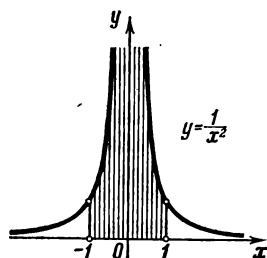



Fig. 222

Exemplo — 8. Calcular o integral $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

Resolução — Tendo a função sob o sinal soma uma descontinuidade no ponto $x = 0$, decompor-se-á o integral em dois:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1\to -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2\to +0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

Calculemos cada limite separadamente:

$$\lim_{\varepsilon_1\to -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_1\to -0} \frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\varepsilon_1} = -\lim_{\varepsilon_1\to -0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{-1}\right) = \infty.$$

Por conseguinte, o integral diverge no intervalo $[-1, 0]$. Por outra via:

$$\lim_{\varepsilon_2\to +0} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_2\to +0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \infty.$$

Então, o integral diverge igualmente no intervalo $[0, 1]$

Vê-se que o integral dado diverge sobre o segmento $[-1, 1]$.

Se se o tivesse integrado, omitindo a descontinuidade no ponto $x = 0$, ter-se-ia obtido um resultado erróneo. Com efeito,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1}\right) = -2,$$

o que é evidentemente falso (fig. 222).

Nota — Se a função $f(x)$ definida no segmento $[a, b]$ possui sobre este segmento descontinuidades em número finito nos pontos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, define-se o integral de $f(x)$ sobre o segmento $[a, b]$, como se segue:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{b} f(x)\,dx,$$

se cada um dos integrais da direita converge. Se um qualquer destes integrais diverge, então $\int_a^b f(x)\,dx$ diz-se divergente.

Para determinar a convergência dos integrais das funções descontínuas e avaliar os seus valores, é muitas vezes possível utilizar teoremas análogos aos teoremas sobre os integrais com limite infinitos.

Teorema — 1'. *Se as funções* f(x) *e* φ(x) *são descontínuas no ponto* c *do segmento* [a, c], *se se tem em cada ponto deste segmento a desigualdade*

$$\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$$

e se $\int_a^c \varphi(x)\,dx$ *converge, o mesmo sucede a* $\int_a^c f(x)\,dx$.

Teorema — 2'. *Se as funções* f(x) *e* φ(x) *são descontínuas no ponto* c *do segmento* [a, c], *se se tem em cada ponto deste segmento*

$$f(x) \geqslant \varphi(x) \geqslant 0$$

e se $\int_a^c \varphi(x)\,dx$ *diverge, o mesmo sucede a* $\int_a^c f(x)\,dx$.

Teorema — 3'. *Se a função* f(x) *é de sinal variável sobre o segmento* [a, c], *se ela é descontínua sòmente no ponto* c *e se o integral* $\int_a^c |f(x)|\,dx$ *do valor absoluto desta função converge, o mesmo sucede a* $\int_a^c f(x)\,dx$.

Muitas vezes toma-se $\frac{1}{(c-x)^{\alpha}}$ como função de comparação. É fácil de ver que $\int_a^c \frac{1}{(c-x)^{\alpha}}\,dx$ converge para $\alpha < 1$, diverge para $\alpha \geqslant 1$.

Isto respeita igualmente aos integrais $\int_a^c \frac{1}{(x-v)^{\alpha}}\,dx$.

Exemplo — 9. O integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}dx$ converge?

Resolução — A função a integrar é descontínua na extremidade esquerda do segmento [0, 1]. Obtém-se, comparando-a à função $\frac{1}{\sqrt{x}}$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}<\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

O integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ existe. Daí resulta que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}dx$, o integral da função dada, que é menor, existe também.

§ 8. Cálculo aproximado dos integrais definidos

Indicámos, no fim do Capítulo X, que a primitiva duma função contínua arbitrária podia não se exprimir por meio de funções elementares. O cálculo dos integrais definidos pela aplicação da fórmula de Newton-Leibniz é, então, difícil e tem-se de recorrer a diversos métodos de cálculo aproximado. Vamos expor, agora, vários métodos de integração aproximada, partindo da noção do integral definido como limite duma soma.

I. *Fórmula dos rectângulos* — Seja dada sobre o segmento $[a, b]$ uma função contínua $y=f(x)$. Propõe-se calcular o integral definido

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Cortemos o segmento $[a, b]$ pelos pontos $a=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n=b$ em n partes iguais de comprimento Δx:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}.$$

Designemos, seguidamente, por $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ os valores da função nos pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, seja:

$$y_0=f(x_0);\qquad y_1=f(x_1);\ \ldots;\ y_n=f(x_n).$$

Formemos as somas

$$y_0\,\Delta x+y_1\,\Delta x+\ldots+y_{n-1}\,\Delta x,$$

$$y_1\,\Delta x+y_2\,\Delta x+\ldots+y_n\,\Delta x.$$

Cada uma destas somas é uma soma integral para a função $f(x)$ sobre o segmento $[a, b]$ e, por conseguinte, representa, aproximadamente, o integral

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}), \tag{1}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n). \tag{1'}$$

São as fórmulas dos rectângulos. Resulta da fig. 223 que se $f(x)$ é uma função positiva crescente, a fórmula (1) representa a área dos rectângulos que se encontram sob a curva $y = f(x)$ e (1'), a área dos rectângulos que se estendem sobre a curva.

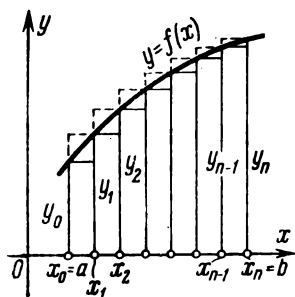



Fig. 223

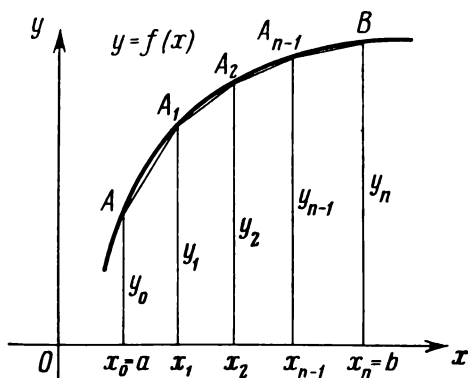



Fig. 224

O erro cometido, ao calcular o integral, segundo a fórmula dos rectângulos, é tanto mais pequeno quanto maior for n (isto é, que os segmentos parciais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ são menores).

II. *Fórmula dos trapézios* — É natural esperar-se um valor mais exacto do integral definido se se substituir a curva dada $y = f(x)$ não por uma curva em escada, como para a fórmula dos rectângulos, mas por uma linha quebrada *inscrita* (fig. 224). Toma-se, então, em vez da área do trapézio curvilíneo $aABb$ a soma das áreas de trapézios rectângulos cujas cordas AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}B$ figuram entre os lados.

Sendo as áreas destes trapézios, sucessivamente, $\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x$, $\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x$, tem-se:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x\right),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right). \qquad (2)$$

É a *fórmula dos trapézios.*

O número n é tomado arbitràriamente. Quanto maior for n e mais pequenos forem os segmentos parciais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, mais precisa é a aproximação fornecida pela expressão do segundo membro da igualdade aproximada (2).

III. *Fórmula das parábolas* (fórmula de Simpson) — Dividamos o segmento $[a, b]$ num número par $n = 2m$ de partes iguais. Substituamos a área do trapézio curvilíneo correspondente aos dois primeiros segmentos $[x_0, x_1]$ e $[x_1, x_2]$ e delimitado superiormente pela curva dada $y = f(x)$, pela dum trapézio curvilíneo semelhante limitado por uma *parábola do segundo grau* que passa pelos três pontos:

$$M(x_0, y_0); \qquad M_1(x_1, y_1); \qquad M_2(x_2, y_2),$$

e cujo eixo é paralelo ao eixo Oy (fig. 225). Chamaremos a um tal trapézio um trapézio *parabólico.*

A equação duma parábola, cujo eixo é paralelo ao eixo Oy, escreve-se

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Determinam-se os coeficientes A, B, C unìvocamente da condição de a parábola passar pelos três pontos dados. Constroiem-se parábolas análogas para os outros pares de segmentos. A soma das áreas dos trapézios parabólicos fornecerá um valor aproximado do integral.

Calculemos, primeiramente, a área dum trapézio parabólico.

Lema — *Um trapézio curvilíneo delimitado pela parábola*

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

o eixo Ox *e duas rectas paralelas ao eixo* Oy *distantes de* 2h, *tem por área*

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2), \tag{3}$$

em que y_0 *e* y_2 *são ordenadas extremas e* y_1, *a ordenada da curva no meio do segmento.*

Demonstração — Tomemos os eixos de coordenadas como está indicado na figura 226.

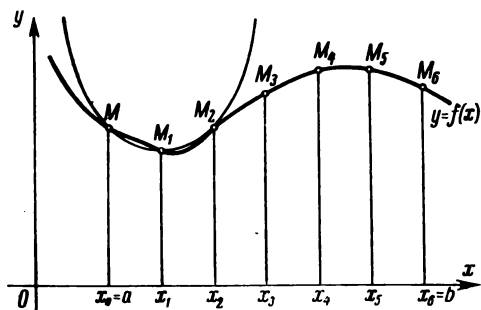
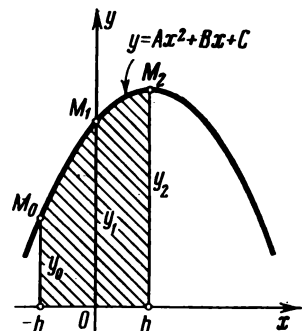



Fig. 225 Fig. 226

Deduzem-se os coeficientes da parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ das equações seguintes:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -h, & y_0 &= Ah^2 - Bh + C;\\ x_1 &= 0, & y_1 &= \qquad\qquad\quad C;\\ x_2 &= h, & y_2 &= Ah^2 + Bh + C. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Supondo os coeficientes A, B, C, *conhecidos*, calcula-se a área do trapézio parabólico por meio do integral definido:

$$S = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\, dx =$$

$$= \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

Mas resulta da igualdade (4)

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

Por conseguinte,

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

c. q. d.

Voltemos ao nosso problema inicial (ver fig. 225). Utilizando a fórmula (3), pode-se escrever as igualdades aproximadas ($h = \Delta x$):

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

. . . .

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}=b} f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Juntando membro a membro, obtém-se, à esquerda, o integral procurado e à direita o seu valor aproximado:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots$$
$$\ldots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}), \tag{5}$$

ou melhor

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6m}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) +$$
$$+ 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})].$$

É a *fórmula de Simpson*. O número de pontos de divisão $2m$ é arbitrário, mas quanto maior ele for, mais a soma do segundo membro de (5) nos dá um valor exacto do integral (*).

(*) Para determinar o número de pontos de divisão que é preciso tomar para calcular o integral com uma precisão dada, poder-se-á utilizar fórmulas que permitam avaliar o erro que resulta do cálculo aproximado do integral. Não indicaremos aqui estas avaliações.

Exemplo — Calcular aproximadamente

$$\operatorname{Log} 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Resolução — Dividamos o segmento [1, 2] em 10 partes iguais (fig. 127). Façamos

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0,1,$$

e formemos o quadro dos valores da função sob o sinal soma:

x	$y=\frac{1}{x}$	x	$y=\frac{1}{x}$
$x_0=1,0$	$y_0=1,00000$	$x_6=1,6$	$y_6=0,62500$
$x_1=1,1$	$y_1=0,90909$	$x_7=1,7$	$y_7=0,58824$
$x_2=1,2$	$y_2=0,83333$	$x_8=1,8$	$y_8=0,55556$
$x_3=1,3$	$y_3=0,76923$	$x_9=1,9$	$y_9=0,52632$
$x_4=1,4$	$y_4=0,71429$	$x_{10}=2,0$	$y_{10}=0,50000$
$x_5=1,5$	$y_5=0,66667$		

I. Obtém-se segundo a primeira fórmula dos rectângulos (1):

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\,(y_0+y_1+\ldots+y_9) = 0,1\cdot 7,18773 = 0,71877.$$

Obtém-se segundo a segunda fórmula dos rectângulos (1'):

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\,(y_1+y_2+\ldots+y_{10}) = 0,1\cdot 6,68773 = 0,66877.$$

Resulta imediatamente da figura 227 que no nosso caso a primeira fórmula dá o valor do integral por *excesso* e o segundo por *defeito.*

II. Obtém-se segundo a fórmula dos trapézios (2):

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1\left(\frac{1+0,5}{2}+6,18773\right) = 0,69377.$$

III. Tem-se segundo a fórmula de Simpson (5):

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0,1}{3}\,[y_0+y_{10}+2\,(y_2+y_4+y_6+y_8)+4\,(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)] =$$

$$= \frac{0,1}{3}\,(1+0,5+2\cdot 2,72818+4\cdot 3,45955) = 0,69315.$$

Na realidade, $\operatorname{Log} 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0,6931472$ (a menos de sete casas decimais).

Por conseguinte, dividindo o segmento [0, 1] em dez partes iguais, a fórmula de Simpson dá cinco décimais exactas, a fórmula dos trapézios,

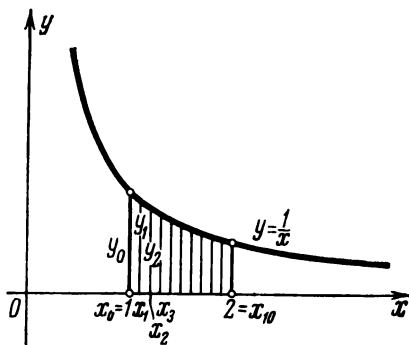



Fig. 227

sòmente três, e apenas podemos responder à primeira décimal quando se aplica a fórmula dos rectângulos.

§ 9. Fórmula de Tchébychev

Nos cálculos técnicos, tem-se muitas vezes de recorrer à fórmula de integração aproximada de Tchébychev.

Seja ainda calcular $\int_a^b f(x)\,dx$.

Substituamos a função sob o sinal soma pelos polinómios de interpolação de Lagrange $P(x)$ (§ 9, Cap. VII) tomando sobre o segmento $[a, b]$ n certos valores da função: $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, onde x_1, x_2, ..., x_n são pontos arbitrários do segmento $[a, b]$:

$$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} f(x_1) +$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} f(x_2) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})} f(x_n). \qquad (1)$$

Obtém-se a fórmula seguinte de integração aproximada:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx \tag{2}$$

que, após cálculos, toma a fôrma

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_n f(x_n), \tag{3}$$

em que os coeficientes C_i são dados pelas fórmulas

$$C_i = \int_a^b \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}\,dx \tag{4}$$

A fórmula (3) é difícil e incómoda para os cálculos, dado que os coeficientes C_i se exprimem em função de fracções complicadas.

Tchébychev pôs o problema inverso: dar, não as abcissas x_1, x_2, ..., x_n, mas os coeficientes C_1, C_2, ..., C_n e determinar as abcissas x_1, x_2, ..., x_n.

Tomam-se os coeficientes C_i de modo que fórmula (3) fique o mais simples possível para os cálculos. É, evidentemente assim quando todos os C_i são iguais:

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_n.$$

Designando o valor comum dos coeficientes C_1, C_2, ..., C_n por C_n, a fórmula (3) torna-se

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx C_n[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]. \tag{5}$$

A fórmula (5) representa, em geral, uma igualdade *aproximada*, mas se $f(x)$ é um polinómio de grau não superior a $n-1$, tem-se, então, uma igualdade *exacta*. É esta circunstância que permite determinar as quantidades C_n, x_1, x_2, ..., x_n.

A fim de obter uma fórmula que convenha a todo o intervalo de integração, reduzamos o segmento de integração $[a, b]$ ao segmento $[-1, 1]$. Façamos, para esse efeito

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t;$$

ter-se-á, então, $x = a$ para $t = -1$ e $x = b$ para $t = 1$.

Por conseguinte,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt,$$

em que se designou por $\varphi(t)$ a função de t sob o sinal soma. Por conseguinte, a integração duma função $f(x)$ dada sobre um segmento $[a, b]$ pode ser sempre (reduzida à integração duma outra função $\varphi(x)$ sobre o segmento $[-1, 1]$.

Assim, o problema reside em escolher os números C_n, x_1, x_2, ..., x_n na fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = C_n[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)] \tag{6}$$

de modo que esta fórmula seja exacta para toda a função $f(x)$ da forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}. \tag{7}$$

Notemos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1})\,dx =$$

$$= \begin{cases} 2\left(a_0+\dfrac{a_2}{3}+\dfrac{a_4}{5}+\dfrac{a_6}{7}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{n}\right) & \text{se é ímpar;} \\ 2\left(a_0+\dfrac{a_2}{3}+\ldots+\dfrac{a_{n-2}}{n-1}\right) & \text{se é par.} \end{cases} \tag{8}$$

Por outra via, tendo em atenção (7), a soma do segundo membro da igualdade (6) é igual a

$$C_n[na_0 + a_1(x_1+x_2+\ldots+x_n) + a_2(x_1^2+x_2^2+\ldots$$
$$\ldots+x_n^2)+\ldots+a_{n-1}(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\ldots+x_n^{n-1})]. \tag{9}$$

Igualando as expressões (8) e (9), obtém-se uma igualdade que deve ser verdadeira, quaisquer que sejam a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}:

$$2\left(a_0+\frac{a_2}{3}+\frac{a_4}{5}+\frac{a_6}{7}+\ldots\right) =$$
$$= C_n[na_0 + a_1(x_1+x_2+\ldots+x_n) +$$
$$+ a_2(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\ldots+x_n^{n-1})].$$

Igualemos os coeficientes de $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ nos dois membros:

$$\left.\begin{array}{r}
2 = C_n n \quad \text{ou} \quad C_n = \dfrac{2}{n}; \\
x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0; \\
x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \dfrac{2}{3C_n} = \dfrac{n}{3}; \\
x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0; \\
x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 = \dfrac{2}{5C_n} = \dfrac{n}{5}; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (10)$$

Deduzem-se as abcissas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ destas n últimas equações. Estas soluções foram encontradas por Tchébychev para diversos valores de n. Damos abaixo as soluções que ele encontrou quando o número de pontos de divisão n é igual a 3, 4, 5, 6, 7, 9:

Número de ordenadas n	Coeficientes C_n	Valores das abcissas $x_1, x_2, \ldots, x_n$
3	$\frac{2}{3}$	$x_1 = -x_3 = 0,707107$ $x_2 = 0$
4	$\frac{1}{2}$	$x_1 = -x_4 = 0,794654$ $x_2 = -x_3 = 0,187592$
5	$\frac{2}{5}$	$x_1 = -x_5 = 0,832498$ $x_2 = -x_4 = 0,374541$ $x_3 = 0$
6	$\frac{1}{3}$	$x_1 = -x_6 = 0,866247$ $x_2 = -x_5 = 0,422519$ $x_3 = -x_4 = 0,266635$
7	$\frac{2}{7}$	$x_1 = -x_7 = 0,883862$ $x_2 = -x_6 = 0,529657$ $x_3 = -x_5 = 0,323912$ $x_4 = 0$
9	$\frac{2}{9}$	$x_1 = -x_9 = 0,911589$ $x_2 = -x_8 = 0,601019$ $x_3 = -x_7 = 0,528762$ $x_4 = -x_6 = 0,167906$ $x_5 = 0$

Por conseguinte, efectuar-se-á o cálculo aproximado do integral sobre o segmento [— 1, 1] aplicando a *fórmula* seguinte de *Tchébychev*:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)],$$

em que n é escolhido no grupo 3, 4, 5, 6, 7, 9, e estando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ representados no quadro. Não se pode tomar para n o número 8 ou números superiores a 9; o sistema de equações (10) dá, então, raízes complexas.

Quando os limites de integração do integral dado são a e b, a fórmula de Tchébychev torna-se

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}[f(X_1) + f(X_2) + \ldots + f(X_n)],$$

em que $X_i = \dfrac{b+a}{2} + \dfrac{b-a}{2} x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, e tendo os x_i os valores dados no quadro.

Demos um exemplo de cálculo por aplicação da fórmula de Tchébychev.

Exemplo — Calcular $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x}$ $(= \text{Log } 2)$.

Resolução — Reduzamos por uma mudança de variável, o segmento de integração ao segmento [— 1, 1]:

$$x = \frac{1+2}{2} + \frac{2-1}{2}t = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} = \frac{3+t}{2},$$

$$dx = \frac{dt}{2}.$$

E

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{3+t}.$$

Calculemos este último integral para $n = 3$, aplicando a fórmula de Tchébychev:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{2}{3}[f(0{,}707107) + f(0) + f(-0{,}707107)].$$

Dado que

$$f(0{,}707107)=\frac{1}{3+0{,}707107}=\frac{1}{3{,}707107}=0{,}269752,$$

$$f(0)=\frac{1}{3+0}=0{,}333333,$$

$$f(-0{,}707107)=\frac{1}{3-0{,}707107}=\frac{1}{2{,}292893}=0{,}436130,$$

tem-se

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt}{3+t}=\frac{2}{3}(0{,}269752+0{,}333333+0{,}436130)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 1{,}039215=0{,}692810\approx 0{,}693.$$

Comparando este resultado aos resultados fornecidos pelas fórmulas dos rectângulos, dos trapézios e de Simpson (ver o exemplo do parágrafo anterior), verifica-se que o resultado obtido pela aplicação da fórmula de Tchébychev (com três pontos de divisão) é mais preciso que o resultado obtido pela aplicação da fórmula dos trapézios (com nove pontos de divisão).

Indiquemos que a teoria do cálculo aproximado dos integrais foi desenvolvido nos trabalhos de A. Krylov (1863-1945).

§ 10. Integrais que dependem dum parâmetro

Derivação dos integrais que dependem dum parâmetro. Seja o integral

$$I(\alpha)=\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx \tag{1}$$

no qual a função sob o sinal soma depende dum certo parâmetro α. Se o parâmetro α varia, o valor do integral variará também. Resulta que o integral definido é *função* de α; poder-se-á, então, designá-la por $I(\alpha)$.

1. Suponhamos que $f(x,\ \alpha)$ e $f'_\alpha(x,\ \alpha)$ são funções contínuas quando

$$c\leqslant\alpha\leqslant d \quad \text{e} \quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{2}$$

Determinemos a derivada do integral em relação a α:

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'_\alpha(\alpha).$$

Verifiquemos, para esse efeito, que

$$I(\alpha+\Delta\alpha)=\int_a^b f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)\,dx$$

e, por conseguinte,

$$I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)=\int_a^b f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)\,dx-\int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx=$$

$$=\int_a^b [f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ \alpha)]\,dx;$$

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b \frac{f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx.$$

Apliquemos a fórmula dos crescimentos finitos de Lagrange à função sob o sinal soma; obtém-se:

$$\frac{f(x,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ \alpha)}{\Delta\alpha}=f'_\alpha(x,\ \alpha+\theta\Delta\alpha),$$

em que $0<\theta<1$.

Dado que $f'_\alpha(x,\ \alpha)$ é contínua no domínio fechado (2), tem-se

$$f'_\alpha(x,\ \alpha+\theta\Delta\alpha)=f'_\alpha(x,\ \alpha)+\varepsilon,$$

em que a quantidade ε, que depende de x, α, $\Delta\alpha$, tende para zero quando $\Delta\alpha\to 0$.

De modo que

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b [f'_\alpha(x,\ \alpha)+\varepsilon]\,dx=$$

$$=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx+\int_a^b \varepsilon\,dx.$$

Passando ao limite, fazendo $\Delta\alpha\to 0$, obtém-se (*):

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'_\alpha(\alpha)=\int_a^b f'_\alpha(x,\ \alpha)\,dx$$

(*) A função sob o sinal soma no integral $\int_a^b \varepsilon\,dx$ tende para zero quando $\Delta\alpha\to 0$. Do facto de a função sob o sinal soma tender em cada ponto para zero, não é forçoso que o integral tenda também para zero. Todavia, no caso dado $\int_a^b \varepsilon\,dx$ tende para zero quando $\Delta\alpha\to 0$. Admiti-lo-emos sem demonstração.

$$\left[\int_a^b f(x, \alpha)\, dx\right]'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

É a *fórmula de Leibniz*.

2. Suponhamos, agora, que os *limites de integração* a *e* b *em (1) são funções de* α*:*

$$I(\alpha) = \Phi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)] = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx. \qquad (1')$$

$\Phi[\alpha, a(\alpha), b(\alpha)]$ é uma função composta de α, por intermédio de a e b. Para determinar a derivada de $I(\alpha)$, apliquemos a regra de derivação das funções compostas (ver § 10, Cap. VIII)

$$I'(\alpha) = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial a}\frac{da}{d\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial b}\frac{db}{d\alpha}. \qquad (3)$$

Em virtude do teorema de derivação dum integral definido em relação ao seu limite superior variável (ver fórmula (1), § 4), obtém-se:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = f[b(\alpha), \alpha],$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = -\frac{\partial}{\partial a}\int_b^a f(x, \alpha)\, dx = -f[a(\alpha), \alpha].$$

Por fim, para calcular $\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$ utilizemos a fórmula de Leibniz estabelecida em cima:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

Obtém-se, substituindo na fórmula (3) as expressões obtidas das derivadas:

$$I'_\alpha(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + f[b(\alpha), \alpha]\frac{db}{d\alpha} - f[a(\alpha), \alpha]\frac{da}{d\alpha}. \qquad (4)$$

A fórmula de Leibniz permite calcular certos integrais definidos.

Exemplo — Calcular o integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} dx.$$

Resolução — Notemos, primeiramente, que não se pode calcular directamente este integral dado que a primitiva da função $e^{-x} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x}$ não se exprime por meio das funções elementares. Para calcular este integral, considererar-se-á como função do parâmetro α:

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} dx.$$

Calcula-se, então, a sua derivada em relação a α aplicando a fórmula de Leibniz (*):

$$I'(\alpha) = \int_0^{\infty} \left[e^{-x} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} \right]'_{\alpha} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \alpha x \, dx.$$

Mas este último integral calcula-se fàcilmente por meio das funções elementares; obtém-se $\frac{1}{1+\alpha^2}$. Por conseguinte,

$$I'(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Determina-se $I(\alpha)$, integrando a identidade obtida:

$$I(\alpha) = \operatorname{arc\,tg} \alpha + C. \quad (5)$$

Resta determinar C. Verifiquemos para este efeito que

$$I(0) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\operatorname{sen} 0 \cdot x}{x} dx = \int_0^{\infty} 0 \, dx = 0.$$

Por outra via, $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$.
Substituindo $\alpha = 0$ na igualdade (5), obtém-se

$$I(0) = \operatorname{arc\,tg} 0 + C,$$

em que $C = 0$. Tem-se, então, para todo o valor de α a igualdade seguinte.

$$I(\alpha) = \operatorname{arc\,tg} \alpha,$$

Isto é,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} dx = \operatorname{arc\,tg} \alpha.$$

(*) Estabeleceu-se a fórmula de Leibniz supondo que os limites de integração a e b eram finitos. Todavia, a fórmula de Leibniz convém neste presente caso, ainda que um dos limites de integração seja infinito.

Exercícios

Calcular os integrais definidos seguintes, considerando-os como limites de somas integrais s_n

$$\int_a^b x^2\,dx.$$

Indicação — Cortar o segmento $[a, b]$ em n partes pelos pontos $x_i = aq^i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ em que $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. Resp. $\frac{b^3 - a^3}{3}$.

2. $\int_a^b \frac{dx}{x}$, em que $0 < a < b$. Resp. $\text{Log}\,\frac{b}{a}$.

Indicação — Cortar o segmento $[a, b]$ como no exemplo anterior.

3. $\int_a^b \sqrt{x}\,dx$. Resp. $\frac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})$.

Indicação — Ver o exemplo anterior.

4. $\int_a^b \text{sen}\,x\,dx$. Resp. $\cos a - \cos b$.

Indicação — Estabelecer, prèviamente, a identidade seguinte:

$$\text{sen}\,a + \text{sen}\,(a+h) + \text{sen}\,(a+2h) + \ldots + \text{sen}\,[a+(n-1)\,h] = \frac{\cos(a-h) - \cos(a+nh)}{2\,\text{sen}\,h},$$

é preciso, para este efeito, multiplicar e dividir todos os termos dc primeiro membro por sen h e substituir os produtos de senos pelas diferenças de cossenos.

5. $\int_a^b \cos x\,dx$. Resp. $\text{sen}\,b - \text{sen}\,a$.

Utilizar a fórmula de Newton-Leibniz para calcular os integrais definidos:

6. $\int_0^1 x^4\,dx$. Resp. $\frac{1}{5}$.

7. $\int_0^1 e^x\,dx$. Resp. $e - 1$.

Resj

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\,x\,dx$. Resp. 1.

9 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ Resp. $\frac{\pi}{4}$.

10. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Resp. $\frac{\pi}{4}$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\, dx$. Resp. Log 2.

12. $\int_1^{e} \frac{dx}{x}$. Resp. 1.

13. $\int_1^{x} \frac{dx}{x}$. Resp. Log x.

14. $\int_0^{x} \operatorname{sen} x\, dx$. Resp. $2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

15. $\int_{\sqrt[3]{a}}^{x} x^2\, dx$. Resp. $\frac{x^3-a}{3}$.

16. $\int_1^{z} \frac{dx}{2x-1}$. Resp. Log $(2z-1)$.

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$. Resp. $\frac{\pi}{4}$.

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\, dx$. Resp. $\frac{\pi}{4}$.

Calcular os integrais seguintes, fazendo as mudanças de variáveis indicadas:

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx$, $\cos x = t$. Resp. $\frac{1}{3}$.

20. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Resp. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

21. $\int_1^{4} \frac{x\, dx}{\sqrt{2+4x}}$, $2+4x = t^2$. Resp. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

22. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, $x = \operatorname{tg} t$. Resp. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

23. $\int_1^{5} \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx$, $x-1 = t^2$. Resp. $2\,(2 - \operatorname{arc\,tg} 2)$.

24. $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}}$, $z = \frac{1}{x}$. Resp. Log $\frac{3}{2}$.

25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{6-5\,\text{sen}\,\varphi+\text{sen}^2\varphi}$, $\text{sen}\,\varphi=t$. Rép. $\text{Log}\,\frac{4}{3}$.

Mostrar que

26. $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx\ (m>0,\ n>0)$.

27. $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$.

28. $\int_0^a f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^a f(x^2)\,dx$.

Calcular os integrais impróprios seguintes (limites infinitos ou singularidade da função a integrar):

29. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Resp. 1.

30. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$. Resp. 1.

31. $\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}$. Resp. $\frac{\pi}{2a}\ (a>0)$.

32. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Resp. $\frac{\pi}{2}$.

33. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^5}$. Resp. $\frac{1}{4}$.

34. $\int_0^1 \text{Log}\,x\,dx$. Resp. -1.

35. $\int_0^\infty x\,\text{sen}\,x\,dx$. Resp. O integral diverge

36. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Resp. O integral diverge

37. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. Resp. π.

38. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. Resp $\frac{3}{2}$.

39. $\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$. Resp. O integral diverge

40. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Resp. $\frac{\pi}{2}$.

41. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$. Resp. O integral diverge

42. $\int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} bx\, dx\ (a > 0)$. Resp. $\frac{b}{a^2+b^2}$.

43. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx\ (a > 0)$. Resp. $\frac{a}{a^2+b^2}$.

Calcular os valores aproximados dos integrais.

44. $\operatorname{Log} 5 = \int_1^5 \frac{dx}{x}$ por aplicação da fórmula dos trapézios e da fórmula de Simpson ($n = 12$). Resp. 1,6182 (segundo a fórmula dos trapézios); 1,6098 (Simpson).

45. $\int_1^{11} x^3\, dx$ segundo a fórmula dos trapézios e a fórmula de Simpson ($n = 10$). Resp. 3690; 3660.

46. $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\, dx$ segundo a fórmula dos trapézios ($n = 6$). Resp. 0,8109.

47. $\int_1^3 \frac{dx}{2x-1}$ segundo a fórmula de Simpson ($n = 4$). Resp. 0,8111.

48. $\int_1^{10} \log_{10} x\, dx$ segundo a fórmula dos trapézios e a fórmula de Simpson ($n = 10$). Resp. 6,0656; 6,0896.

49. Calcular o valor de π partindo de que $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, por aplicação da fórmula de Simpson ($n = 10$). Resp. 3,14159.

50. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ segundo a fórmula de Simpson ($n = 10$). Resp. 1,371.

51. Partindo da igualdade $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\, dx = \frac{1}{\alpha}$, em que $\alpha > 0$, determinar para o inteiro $n > 0$ o valor do integral $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx$. Resp. $n!$

52. Partindo da igualdade $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, determinar o valor do integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$. Resp. $\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n n!}$

53. Calcular o integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x e^x}\, dx$. Resp. $\operatorname{Log}(1 + \alpha)$ ($\alpha > -1$).

54. Servir-se da igualdade $\displaystyle\int_0^{1} x^{n-1}\, dx = \frac{1}{n}$ para calcular o integral $\displaystyle\int_0^{1} x^{n-1} (\operatorname{Log} x)^k\, dx$. Resp. $(-1)^k \dfrac{k!}{n^{k+1}}$.

Capítulo XII

APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS E MECÂNICAS DO INTEGRAL DEFINIDO

§ 1. Cálculo das áreas em coordenadas rectangulares

Se a função $f(x) \geqslant 0$ sobre o segmento $[a, b]$, sabe-se que (§ 2, Cap. XI) a área do trapézio curvilíneo formado pela curva $y = f(x)$, o eixo Ox e as rectas $x = a$ e $x = b$ (fig. 210) é dada por

$$Q = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

Se $f(x) \leqslant 0$ sobre $[a, b]$, o integral definido $\int_a^b f(x)\,dx$ é também $\leqslant 0$. O seu valor absoluto é igual à área Q do trapézio curvilíneo correspondente:

$$-Q = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Se $f(x)$ muda um número finito de vezes de sinal sobre o segmento $[a, b]$, decompor-se-á o integral sobre $[a, b]$ em integrais

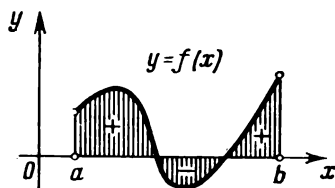
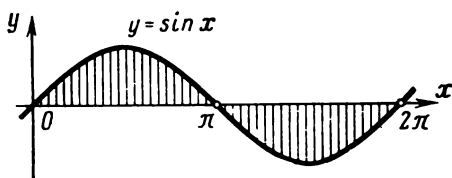



Fig. 228 Fig. 229

parciais. O integral é positivo sobre os segmentos em que $f(x) \geqslant 0$ e negativo sobre aqueles em que $f(x) \leqslant 0$. O integral sobre o segmento completo representa a diferença das áreas que se encontram dum lado e doutro do eixo Ox (fig. 228). Para obter a soma das áreas no sentido ordinário, é preciso encontrar a soma dos valores absolutos dos integrais sobre os intervalos parciais indicados ou, melhor, calcular o integral

$$Q = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Exemplo — 1. Calcular a área Q delimitada pela sinusóide $y = \operatorname{sen} x$ e o eixo Ox quando $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ (fig. 229).

Resolução — Dado que $\operatorname{sen} x \geqslant 0$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi$ e $\operatorname{sen} x \leqslant 0$ para $\pi < x \leqslant 2\pi$, tem-se,

$$Q = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx \right| = \int_{\pi}^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx,$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x \,\Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x \,\Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos \pi) = -2.$$

Por conseguinte, $Q = 2 + |-2| = 4$.

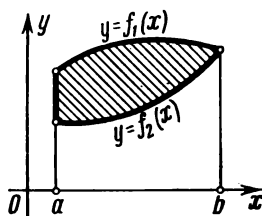
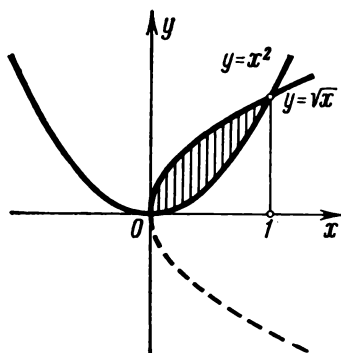



Fig. 230 Fig. 231

Se for preciso calcular a área delimitada pelas curvas $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ e as rectas $x = a$, $x = b$ com a condição $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, ter-se-á, evidentemente, (fig. 230):

$$Q = \int_a^b f_1(x)\, dx - \int_a^b f_2(x)\, dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\, dx. \qquad (2)$$

Exemplo — 2. Calcular a área delimitada pelas curvas (fig. 231)

$$y = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad y = x^2.$$

Resolução — Determinemos os pontos de intersecção das curvas: $\sqrt{x} = x^2$, $x = x^4$, donde $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Por conseguinte,

$$Q = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x^2\, dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Calculemos agora a área do trapézio curvilíneo delimitado pela curva de equações paramétricas (fig. 232).

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \tag{3}$$

onde

$$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

e

$$\varphi(\alpha) = a, \qquad \varphi(\beta) = b.$$

Suponhamos que a curva definida pelas equações (3) pode ser posta ainda sob a forma $y = f(x)$ com o segmento $[a, b]$ para domínio de definição. Poder-se-á calcular, então, a área como se segue:

$$Q = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx.$$

Façamos a mudança de variável:

$$x = \varphi(t); \qquad dx = \varphi'(t)\,dt.$$

Tem-se, tendo em vista as equações

$$y = f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t).$$

Por conseguinte,

$$Q = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{4}$$

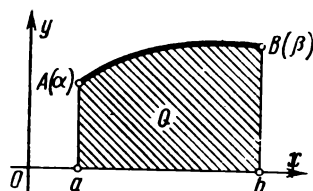



Fig. 232

Tal é a fórmula que permite calcular a área dum trapézio curvilíneo delimitado superiormente por uma curva em coordenadas paramétricas.

Exemplo — 3. Calcular a área do domínio delimitado pela elipse

$$x = a\cos t, \qquad y = b\,\text{sen}\,t.$$

Resolução — Calculemos a área delimitada pela semi-elípse superior e dupliquemos o resultado obtido. Aqui, x varia entre $-a$ e $+a$ por conseguinte, t varia de π a 0,

$$Q = 2\int_\pi^0 (b\,\text{sen}\,t)(-a\,\text{sen}\,t\,dt) = -2ab\int_\pi^0 \text{sen}^2\,t\,dt = 2ab\int_0^\pi \text{sen}^2\,t\,dt =$$

sen²

$$= 2ab\int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\text{sen}\,2t}{4}\right]_0^\pi = \pi ab.$$

Exemplo — 4. Calcular a área delimitada pelo eixo Ox e um arco da ciclóide

$$x = a(t - \text{sen}\,t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

Resolução — Quando t varia de zero a 2π, x varia de zero a $2\pi a$. Obtém-se, aplicando a fórmula (4):

$$Q=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\, a(1-\cos t)\, dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\, dt =$$

$$= a^2\left[\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi}\cos t\, dt + \int_0^{2\pi}\cos^2 t\, dt\right];$$

$$\int_0^{2\pi} dt = 2\pi;\quad \int_0^{2\pi}\cos t\, dt = 0;\quad \int_0^{2\pi}\cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \pi.$$

Obtém-se, finalmente:

$$Q = a^2(2\pi+\pi) = 3\pi a^2.$$

§ 2. Área dum sector curvilíneo em coordenadas polares

Seja

$$\rho = f(\theta)$$

a equação duma curva em coordenadas polares, em que $f(\theta)$ é uma função contínua quando $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$.

Determinemos a área do sector OAB delimitada pela curva $\rho = f(\theta)$ e os raios vectores $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$.

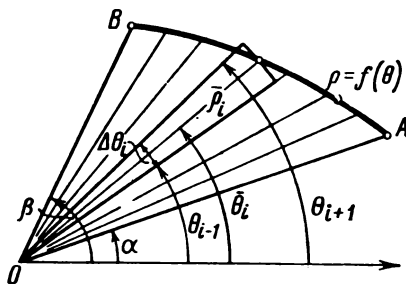



Fig. 233

Dividamos a área dada em n partes pelos raios $\theta_0 = \alpha$, $\theta = \theta_1$, ..., $\theta_n = \beta$. Designemos por $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, ..., $\Delta\theta_n$ os ângulos formados por estes raios (fig. 233).

Designemos por $\bar{\rho}_i$ o comprimento do raio vector correspondente a um ângulo qualquer $\bar{\theta}_i$, compreendido entre θ_{i-1} e θ_{i+1}.

Consideremos o sector circular de raio $\bar{\rho}_i$ e de ângulo ao centro $\Delta\theta_i$. A sua área é

$$\Delta Q_i = \frac{1}{2}\bar{\rho}_i^2\Delta\theta_i.$$

A soma

$$Q_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i^2 \, \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(\theta_i)]^2 \, \Delta\theta_i$$

dá a área do sector em «escada».

Sendo esta soma uma soma integral da função $\rho^2 = [f(\theta)]^2$ sobre o segmento $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, o seu limite quando máx. $\Delta\theta_i \to 0$ dá o integral definido

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\theta.$$

Ele não depende do raio vector $\bar{\rho}_i$ escolhido no ângulo $\Delta\theta_i$. É natural considerar que este limite representa a área procurada (*).

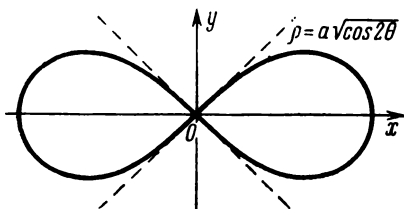



Fig. 234

Assim, a área do sector OAB é igual a

$$Q = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\theta \tag{1}$$

ou

$$Q = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta. \tag{1'}$$

Exemplo — Calcular a área interior à lemniscata

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$$

(fig. 234).

(*) Poder-se-ia mostrar que esta definição da área não contradiz a dada anteriormente; por outras palavras, calculando a área do sector curvilíneo por meio de trapézios curvilíneos obter-se-ia o mesmo resultado.

Resolução — O raio vector abrange o quadro da área procurada quando θ varia de 0 a $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{1}{4}Q=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\,d\theta=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{2}\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{4},$$

por conseguinte,

$$Q = a^2.$$

§ 3. Comprimento dum arco de curva

1. *Comprimento dum arco de curva em coordenadas cartesianas* — Seja $y = f(x)$ a equação duma curva plana em coordenadas rectangulares. Procuremos o comprimento do arco AB desta curva compreendido entre as verticais $x = a$ e $x = b$ (fig. 235).

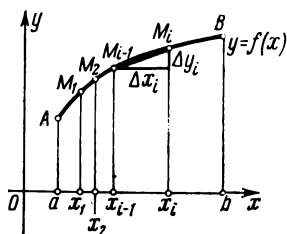



Fig. 235

Deu-se, no Capítulo VI (§ 1), a definição do comprimento dum arco de curva. Recordemo-la. Tomemos sobre o arco AB os pontos A, M_1, M_2, ..., M_i, ..., B de abcissas $x_0 = a_1$, x_1, x_2, ..., x_i, ..., $b = x_n$ e tracemos as cordas AM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$, de que designaremos os comprimentos por Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n. Obtém-se, então, a linha poligonal AM_1M_2 ... $M_{n-1}B$ inscrita no arco AB. O comprimento desta linha poligonal é

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i.$$

Chama-se *comprimento* s do arco AB ao limite para o qual tende o comprimento da linha poligonal inscrita quando a maior corda tende para zero:

$$s = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i. \tag{1}$$

Vamos mostrar agora que se a função $f(x)$ e a sua derivada $f'(x)$ são contínuas sobre o segmento $a \leqslant x \leqslant b$, este limite existe. Assim fazendo, ter-se-á dado ao mesmo tempo um processo de cálculo do comprimento dum arco.

Introduzamos a notação:

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Então,

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

Segundo a fórmula dos crescimentos finitos

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

onde

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i.$$

Por conseguinte,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i.$$

De modo que o comprimento da linha poligonal inscrita é

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i.$$

Sendo a função $f'(x)$ contínua, por hipótese, o mesmo se dirá de $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Daí resulta que a soma integral tem um limite que é igual ao integral definido:

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Assim, obteve-se para o cálculo dos arcos a fórmula

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \qquad (2)$$

Nota — 1. Pode-se obter, partindo desta última fórmula, a derivada do arco em relação à abcissa. Se se supõe que o limite superior de integração é variável e se se o designa por x (não mudaremos a variável de integração), o comprimento do arco s será uma função de x:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Derivando este integral em relação ao limite superior, obtém-se:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (3)$$

Esta fórmula foi estabelecida no § 1, Cap. VI, sob outras hipóteses.

Exemplo — 1. Determinar o comprimento da circunferência

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Resolução — Calculemos, primeiramente, o comprimento do quarto de circunferência no primeiro quadrante. A equação desta porção de arco escreve-se

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

donde,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Por conseguinte,

$$\frac{1}{4} s = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r} \Big|_0^r = r \frac{\pi}{2}.$$

O comprimento da circunferência completa é $s = 2\pi r$.

Determinemos agora o comprimento dum arco de curva quando a curva é dada pelas equações paramétricas:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \tag{4}$$

em que $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ são funções contínuas dotadas de derivadas igualmente contínuas, e não se anulando $\varphi'(t)$ sobre o segmento considerado. Nestas condições, as equações (4) determinam uma certa função $y = f(x)$ contínua com a soma derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Seja $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.
Fazendo, então, no integral (2) a substituição

$$x = \varphi(t), \qquad dx = \varphi'(t)\, dt,$$

obtém-se

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\, \varphi'(t)\, dt,$$

ou, finalmente,

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \tag{5}$$

Nota — 2. Demonstra-se que a fórmula (5) se mantém válida para curvas que são cortadas por verticais em mais dum ponto (principalmente para curvas fechadas), desde que as duas derivadas $\varphi'(t)$ e $\psi'(t)$ sejam contínuas em qualquer ponto da curva.

Exemplo — 2. Calcular o comprimento da hipociclóide (astróide):

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\,\mathrm{sen}^3 t.$$

Resolução — Sendo a curva simétrica relativamente aos dois eixos de coordenadas, calculemos, primeiramente, o quarto do comprimento desta curva que se encontra no primeiro quadrante. Obtém-se:

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\,t, \qquad \frac{dy}{dt} = 3a\,\mathrm{sen}^2 t\cos t.$$

O parâmetro t variará de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Por conseguinte,

$$\frac{1}{4}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\,\mathrm{sen}^2 t + 9a^2\,\mathrm{sen}^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\,\mathrm{sen}^2 t}\,dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}\,t\cos t\,dt = 3a\,\frac{\mathrm{sen}^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}; \qquad s = 6a.$$

Nota — 3. Se se tem uma curva *empenada* definida por equações paramétricas

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t), \tag{6}$$

em que $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ (ver § 1, Cap. IX), define-se o seu comprimento (como para uma curva plana) como o limite duma linha poligonal inscrita, quando a maior corda tende para zero. Se as funções $\varphi(t)$, $\psi(t)$ e $\chi(t)$ são contínuas com as suas derivadas sobre o segmento $[\alpha, \beta]$, a curva tem um comprimento determinado (isto é, o limite indicado acima existe), dado pela fórmula

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt. \tag{7}$$

Admitiremos este resultado sem demonstração.

Exemplo — 3. Calcular o comprimento do arco da hélice

$$x = a\cos t, \quad y = a\,\mathrm{sen}\,t, \quad z = amt$$

correspondente a t entre zero e 2π.

Resolução — Deduz-se das equações dadas

$$dx = -a\,\mathrm{sen}\,t\,dt, \quad dy = a\cos t\,dt, \quad dz = am\,dt.$$

Obtém-se, substituindo na fórmula (7):

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + a^2m^2}\,dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+m^2}\,dt = 2\pi a\sqrt{1+m^2}.$$

2. *Comprimento dum arco de curva em coordenadas polares* — Seja

$$\rho = f(\theta) \tag{8}$$

a equação duma curva em coordenadas polares, sendo ρ o raio polar e θ o ângulo polar.

Fig. 236

As coordenadas rectângulares exprimem-se por meio das coordenadas polares

$$x = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta.$$

Se se substitui ρ pela expressão (8) em função de θ, obtêm-se as equações

$$x = f(\theta) \cos \theta, \qquad y = f(\theta) \operatorname{sen} \theta.$$

Pode-se considerar estas equações como sendo as equações paramétricas da curva e aplicar a fórmula (5). Determinemos para esse efeito as derivadas de x e de y em relação ao parâmetro θ:

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos\theta - f(\theta) \operatorname{sen}\theta;$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \operatorname{sen}\theta + f(\theta) \cos\theta.$$

Tem-se, então,

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 = \rho'^2 + \rho^2.$$

Por conseguinte,

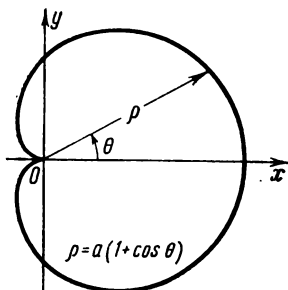
$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\theta.$$

Exemplo — 4. Calcular o comprimento da cardióide (fig. 236)

$$\rho = a\,(1 + \cos \theta).$$

Fazendo variar o ângulo polar θ de 0 a π, obtém-se a metade do comprimento procurado. Tem-se aqui $\rho' = -a \operatorname{sen} \theta$. Por conseguinte,

$$s = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2\,(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta =$$

$$= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \theta}\, d\theta = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a$$

Exemplo — 5. Calcular o comprimento da elipse

$$\left.\begin{array}{l} x = a \cos t, \\ y = b \operatorname{sen} t, \end{array}\right\} 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

supondo $a > b$

Resolução — Sirvamo-nos da fórmula (5). Calculemos, primeiramente, $\frac{1}{4}$ do comprimento, isto é, o comprimento do arco correspondente às variações do parâmetro t entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{s}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 (1 - \cos^2 t) + b^2 \cos^2 t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t}\, dt =$$

$$= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t}\, dt = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t}\, dt,$$

em que $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$. Por conseguinte,

$$s = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t}\, dt.$$

Nada mais resta do que calcular este último integral. Mas sabe-se que ele não se exprime por meio das funções elementares (ver § 16, Cap. X). Este integral não pode ser calculado a não ser por métodos aproximados (pela fórmula de Simpson, por exemplo).

Em particular, se a metade do eixo maior da elipse fôr igual a 5 e o semi-eixo menor fôr 4, tem-se $k = \frac{3}{5}$ e o comprimento da elipse é

$$s = 4 \cdot 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cos^2 t}\, dt.$$

Calculando este último integral, por aplicação da fórmula de Simpson, (dividindo o segmento $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ em quatro partes), obtém-se o valor aproximado do integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{3}{5} \cos^2 t}\, dt \approx 1{,}298\ ;$$

o comprimento total da elipse é, aproximadamente, igual a

$$a \approx 25{,}96 \text{ unidades de comprimento.}$$

§ 4. Cálculo do volume dum corpo em função das áreas das secções paralelas

Consideremos um corpo T e suponhamos conhecida a área de toda a secção arbitrária deste corpo por um plano perpendicular ao eixo Ox (fig. 237).

Esta área depende do plano secante, isto é, que ela é *função* de x:

$$Q = Q(x).$$

Fig. 237

Suponhamos que $Q(x)$ é uma função contínua de x e determinemos o volume do corpo dado.

Tracemos os planos $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_n = b$.

Estes planos cortam o corpo em secções. Tomemos em cada segmento parcial $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ um ponto arbitrário ξ_i e construamos para cada secção $i = 1, 2, \ldots, n$ um cilindro cuja geratriz paralela ao eixo dos x se apoia sobre o contorno da secção pelo plano $x = \xi_i$.

A área da base dum tal cilindro elementar é

$$Q(\xi_i) \qquad (x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i),$$

a altura Δx_i e o volume

$$Q(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

O volume de todos estes cilindros é

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\,\Delta x$$

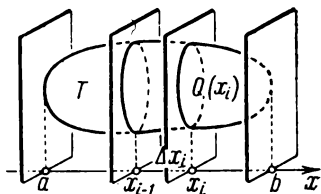
Ao limite desta soma quando max. $\Delta x_i \to 0$ (quando ele existe) chama-se o volume do corpo dado

$$v = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Como v_n representa, evidentemente, uma soma integral para a função contínua $Q(x)$ sobre o segmento $a \leqslant x \leqslant b$, o limite indicado existe e exprime-se pelo integral definido

$$v = \int_a^b Q(x)\,dx. \qquad (1)$$

Exemplo — Calcular o volume delimitado pela elipsóide (fig. 238

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

Resolução — A secção para um plano paralelo ao plano Oyz e que se encontra à distância de x deste último, dá a elipse

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2},$$

ou

$$\frac{y^2}{\left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}+\frac{z^2}{\left[c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]^2}=1,$$

com os semi-eixos

$$b_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}; \quad c_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Mas a área duma tal elipse é igual a $\pi b_1 c_1$ (ver o exemplo 3 do § 1).

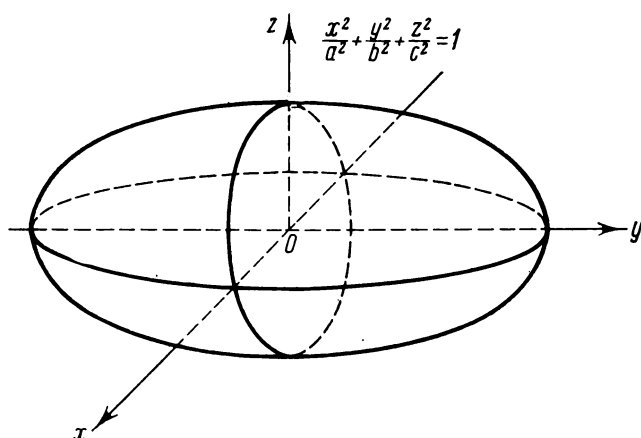



Fig. 238

Por conseguinte,

$$Q(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

O volume da elipsóide é igual a

$$v=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Em especial, se $a=b=c$, a elipsóide torna-se uma esfera cujo volume delimitado é

$$v=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

§ 5. Volume dum corpo de revolução

Consideremos o corpo de revolução gerado pela rotação em volta do eixo Ox do trapézio curvilíneo $aABb$ formado pela curva $y = f(x)$, o eixo Ox e as rectas $x = a$, $x = b$.

Fig. 239

Neste caso, qualquer secção deste corpo para um plano perpendicular ao eixo das abcissas é um círculo, tendo por área

$$Q = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2.$$

Determina-se, aplicando a fórmula usual do cálculo dos volumes [(1), § 4], a fórmula que permite calcular os volumes dos *corpos de revolução:*

$$v = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

Exemplo — Determinar o volume do corpo gerado pela rotação da catenária.

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

em volta do eixo Ox entre os planos $x = 0$ e $x = b$ (fig. 239).

Resolução.

$$v = \pi \frac{a^2}{4} \int_0^b \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx = \frac{\pi a^2}{4} \int_a^b \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}\left[\frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}}\right]_0^b = \frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}}\right) + \frac{\pi a^2 b}{2}$$

§ 6. Área dum corpo de revolução

Consideremos a superfície de revolução obtida fazendo rodar a curva $y = f(x)$ em volta do eixo Ox. Calculemos a área desta superfície no intervalo $a \leqslant x \leqslant b$. Suporemos a função $f(x)$ contínua com a sua derivada em todos os pontos do segmento $[a, b]$.

Como no § 3, tracemos as cordas AM_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}B$ de que designaremos os comprimentos por Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n (fig. 240).

Na sua rotação, cada corda de comprimento Δs_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) gera um tronco de cone cuja área ΔP_i é igual a

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta s_i.$$

Ora,

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i.$$

Obtém-se, aplicando a fórmula dos crescimentos finitos:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

ou $x_{i-1} < \xi_i < x_i$;

por conseguinte,

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i,$$

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i.$$

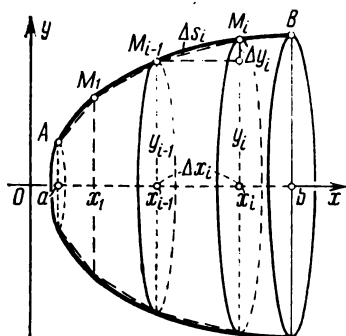



Fig. 240

A área da superfície gerada pela linha poligonal será igual a

$$P_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i,$$

ou melhor ainda, à soma

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i, \tag{1}$$

estendida a todas as cordas. O limite desta soma, quando a maior corda Δs_i tende para zero, chama-se área da superfície de revolução considerada. A soma (1) não é uma soma integral para a função,

$$2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}, \tag{2}$$

dado que no termo correspondente ao segmento $[x_{i-1}, x_i]$ figuram vários pontos deste segmento: x_{i-1}, x_i, ξ_i. Mas pode-se demonstrar

que o limite da soma (1) é igual ao limite da soma integral da função (2), isto é,

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i$$

ou

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \qquad (3)$$

Exemplo — Calcular a área da parabolóide gerada pela rotação em volta de Ox da parábola $y^2 = 2px$. Limitar-se-á à porção compreendida entre os planos $x = 0$ e $x = a$.

Resolução.

$$y = \sqrt{2px}, \quad y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{2p}{4x}} = \sqrt{\frac{2x + p}{2x}},$$

e obtém-se aplicando a fórmula (3):

$$P = 2\pi \int_0^a \sqrt{2px} \sqrt{\frac{2x + p}{2x}}\, dx = 2\pi \sqrt{p} \int_0^a \sqrt{2x + p}\, dx =$$

$$= 2\pi \sqrt{p}\, \frac{2}{3} (2x + p)^{3/2} \frac{1}{2} \Big|_0^a = \frac{2\pi \sqrt{p}}{3} [(2a + p)^{3/2} - p^{3/2}].$$

§ 7. Cálculo do trabalho por meio do integral definido

Suponhamos que um ponto material M solicitado por uma força F se move sobre uma recta Os e que a direcção da força coincide com a do movimento. Pede-se, para calcular o trabalho efectuado pela força F, para deslocar o ponto M da posição $s = a$ à posição $s = b$.

1) Se a força F é constante, o trabalho A é dado pelo produto de F pelo caminho percorrido, ou seja

$$A = F(b - a).$$

2) Suponhamos que a força F varia contìnuamente em função da posição do ponto material, isto é, que ela representa uma função $F(s)$ contínua sobre o segmento $a \leqslant s \leqslant b$.

Cortemos o segmento $[a, b]$ em n partes arbitrárias de comprimentos

$$\Delta s_1, \ \Delta s_2, \ \ldots, \ \Delta s_n,$$

depois escolhamos em cada segmento parcial $[s_{i-1}, s_i]$ um ponto arbitrário ξ_i e substituamos o trabalho da força $F(s)$ sobre o caminho Δs_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pelo produto

$$F(\xi_i)\,\Delta s_i.$$

Isto significa que supomos a força F constante sobre cada segmento, a saber $F = F(\xi_i)$. Nestas condições, a expressão $F(\xi_i)\,\Delta s_i$ dá, para Δs_i suficientemente pequeno, um valor aproximado do trabalho de F sobre o caminho Δs_i e a soma

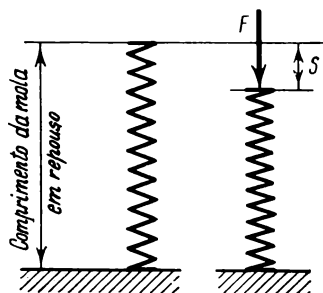
$$A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta s_i$$

exprime, aproximadamente, o trabalho de F sobre todo o segmento $[a, b]$.

É evidente que A_n representa uma soma integral para a função $F = F(s)$ sobre o segmento $[a, b]$. O limite desta soma, quando $\max.(\Delta s_i) \to 0$, existe e exprime o trabalho da força $F(s)$ sobre o caminho entre os pontos $s = a$ e $s = b$:

$$A = \int_a^b F(s)\,ds. \qquad (1)$$

Fig. 241

Exemplo — 1. A compressão S duma mola em espiral é proporcional à força aplicada F. Calcular o trabalho de F quando a mola é comprimida de 5 cm, se for necessário aplicar uma força de 1 kg para comprimir a mola de 1 cm (fig. 241).

Resolução — A força F e a deslocação S estão ligadas, por hipótese, pela relação $F = kS$, em que k é uma constante.

Exprimiremos S em metros e F em kilogramas. Para $S = 0{,}01$ tem-se $F = 1$, isto é, que $1 = k \cdot 0{,}01$, donde $k = 100$ e $F = 100S$.

Tem-se, em virtude da fórmula (1):

$$A = \int_0^{0,05} 100S\,dS = 100\frac{S^2}{2}\Big|_0^{0,05} = 0{,}125 \text{ kgm}.$$

Exemplo — 2. A força de repulsão entre duas cargas eléctricas do mesmo sinal e_1 e e_2 distantes de r exprime-se pela fórmula

$$F = k\frac{e_1 e_2}{r^2},$$

em que k é uma constante.

Determinar o trabalho da força F para deslocar a carga e_2 do ponto A_1, encontrando-se à distância r_1 de e_1, no ponto A_2, à distância r_2 de e_1, admitindo que a carga e_1 se encontra na origem A_0.

Resolução — Tem-se, segundo a fórmula (1):

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k \frac{e_1 e_2}{r^2}\, dr = -k e_1 e_2 \frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = k e_1 e_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Obtém-se, para $r_2 = \infty$:

$$A = \int_{r_1}^{\infty} \frac{k e_1 e_2}{r^2}\, dr = \frac{k e_1 e_2}{r_1}.$$

Para $e_2 = 1$, tem-se $A = k\frac{e_1}{r}$. Esta última quantidade chama-se *potencial do campo* criado pela carga e_1.

§ 8. Coordenadas do centro de gravidade

Seja dado no plano Oxy um sistema de pontos materiais

$$P_1(x_1, y_1); \quad P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$$

de massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Chama-se aos produtos $x_i m_i$ e $y_i m_i$ *momentos estáticos da massa* m_i em relação aos eixos Oy e Ox.

Designemos por x_c e y_c as coordenadas do centro de gravidade (baricentro) do sistema dado. Como se sabe do curso de mecânica, as coordenadas do baricentro dum sistema de pontos materiais são definidos pelas fórmulas:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \tag{1}$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{2}$$

Vamos utilizar estas fórmulas para determinar os centros de gravidade de diversos corpos e figuras.

1. *Centro de gravidade de uma curva plana pesada* — Seja uma curva *material* AB dada pela sua equação $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

Seja γ a densidade linear (*) desta curva. Cortemos a curva em n partes de comprimento $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. As massas destas partes

(*) Chama-se densidade linear à massa da unidade de comprimento da curva dada. Suporemos que a densidade linear é a mesma em todos os pontos da curva.

serão iguais aos produtos dos comprimentos pela densidade constante): $\Delta m_i = \gamma \Delta s_i$. Tomemos um ponto arbitrário de abcissa ξ_i sobre cada porção do arco Δs_i. Considerando agora que cada porção Δs_i representa um ponto material $P_i\, [\xi_i,\, f(\xi_i)]$ de massa $\gamma \Delta s_i$ e substituindo nas fórmulas (1) e (2) em vez de x_i e y_i respectivamente ξ_i e $f(\xi_i)$ e em vez de m_i o valor $\gamma \Delta s_i$ (a massa da porção Δs_i), obtém-se as fórmulas aproximadas que determinam o centro de gravidade

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \gamma\, \Delta s_i}{\sum \gamma\, \Delta s_i}, \qquad y_c \approx \frac{\sum f(\xi_i)\, \gamma\, \Delta s_i}{\sum \gamma\, \Delta s_i}.$$

Se a função $y = f(x)$ é contínua bem como a sua derivada, as somas do numerador e do denominador de cada fracção têm limites quando $\max \Delta s_i \to 0$. Por conseguinte, as coordenadas do centro de gravidade da curva exprimem-se pelos integrais definidos

$$x_c = \frac{\int_a^b x\, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}, \tag{1'}$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x)\, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}. \tag{2'}$$

Exemplo — 1. Determinar as coordenadas do centro de gravidade da semi-circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ que se encontram por cima do eixo Ox.

Resolução — Determinemos a abcissa do centro de gravidade:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

$$ds = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx,$$

$$x_c = \frac{a \int_{-a}^{a} \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}} = \frac{-a \sqrt{a^2 - x^2}\,\Big|_{-a}^{a}}{a \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}\,\Big|_{-a}^{a}} = \frac{0}{\pi a} = 0.$$

Determinemos agora a ordenada do centro de gravidade:

$$y_c = \frac{\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx}{\pi a} = \frac{a \int\limits_{-a}^{a} dx}{\pi a} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi} .$$

2. *Centro de gravidade duma figura plana* — Suponhamos que a figura dada é delimitada pelas curvas $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ e representa uma figura plana *material*. Suporemos que a densidade superficial, isto é, a massa da unidade da área, é constante e igual a δ para todas as partes da figura.

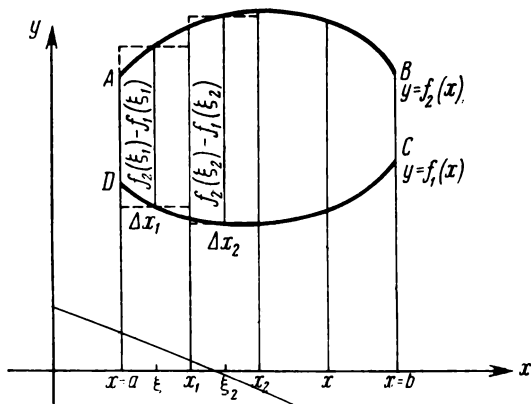



Fig. 242

Dividamos a figura dada em secções paralelas pelas rectas $x = x_1, \ldots, x = x_n = b$ de larguras $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. A massa de cada secção será igual ao produto da sua área pela densidade δ. Assimilando cada secção a um rectângulo (fig. 242) de base Δx_i e de altura $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$, em que $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, a massa desta secção será, aproximadamente, igual a

$$\Delta m_i = \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

O centro de gravidade desta secção encontrar-se-á, aproximadamente, no centro do rectângulo correspondente:

$$(x_i)_c = \xi_i; \qquad (y_i)_c = \frac{f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)}{2}.$$

Localizando agora a massa de cada secção no seu centro de gravidade, encontra-se as coordenadas aproximadas do baricentro de qualquer figura [em virtude das fórmulas (1) e (2)]:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i},$$

$$y_c \approx \frac{\frac{1}{2} \sum [f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)] \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}.$$

Passando ao limite, quando $\Delta x_i \to 0$, obtém-se as coordenadas *exactas* do baricentro da figura dada:

$$x_c = \frac{\int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] \, dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] \, dx};$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f_2(x) + f_1(x)] [f_2(x) - f_1(x)] \, dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] \, dx}.$$

Estas fórmulas adaptam-se a qualquer figura plana homogénea (que tenha uma densidade constante em todos os pontos). Vê-se que as coordenadas do centro de gravidade não dependem da densidade δ da figura (ela elimina-se nos cálculos).

Exemplo — 2. Determinar as coordenadas do centro de gravidade do segmento da parábole $y^2 = ax$ cortada pela recta $x = a$ (fig. 243).

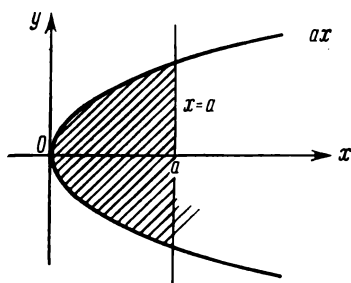



Fig. 243

Resolução — No caso dado $f_2(x)=\sqrt{ax}$, $f_1(x)=-\sqrt{ax}$, logo

$$x_c=\frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}\,dx}{2\int_0^a \sqrt{ax}\,dx}=\frac{\frac{2}{5}2\sqrt{a}\,x^{5/2}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\,\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a}=\frac{\frac{4}{5}a^3}{\frac{4}{3}a^2}=\frac{3}{5}a,$$

$y_c=0$ (dado que o segmento é simétrico em relação ao eixo Ox).

Exercícios

Cálculo das áreas

1. Determinar a área da figura delimitada pelas curvas $y^2=9x$, $y=3x$. Resp. $\frac{1}{2}$.

2. Determinar a área da figura delimitada pela hipérbole equilátera $xy=a^2$, o eixo Ox e as rectas $x=a$, $x=2a$. Resp. $a^2 \operatorname{Log} 2$.

3. Determinar a área da figura compreendida entre a curva $y=4-x^2$ e o eixo Ox. Resp. $10\frac{2}{3}$.

4. Determinar a área da figura delimitada pela hipocicloide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. Resp. $\frac{3}{8}\pi a^2$.

5. Determinar a área da figura delimitada pela catenária $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, o eixo Ox, o eixo Oy e a recta $x=a$. Resp. $\frac{a^2}{2e}(e^2-1)$.

6. Determinar a área da figura delimitada pela curva $y=x^3$, a recta $y=8$ e o eixo Oy. Resp. 12.

7. Determinar a área do domínio delimitado por uma semi-onda de sinusóide e o eixo das abcissas. Resp. 2.

8. Determinar a área do domínio compreendido entre as parábolas $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$. Resp. $\frac{4}{3} p^2$.

9. Determinar a área total da figura delimiada pelas curvas $y = x^3$, $y = 2x$, $y = x$. Resp. $\frac{3}{2}$.

10. Determinar a área do domínio delimitado por um arco de ciclóide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ e o eixo das abcissas. Resp. $3\pi a^2$.

11. Determinar a área da figura delimitada pela hipociclóide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$. Resp. $\frac{3}{8} \pi a^2$.

12. Determinar a área do domínio delimitado pela lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$. Resp. a^2.

13. Determinar a área do domínio delimitado por um arco da curva $\rho = a \operatorname{sen} 2\varphi$. Resp. $\frac{1}{8} \pi a^2$.

14. Calcular a área total do domínio delimitado pela cardióide $\rho = a(1 - \cos \varphi)$. Resp. $\frac{3}{2} \pi a^2$.

15. Calcular a área do domínio delimitado pela curva $\rho = a \cos \varphi$. Resp. $\frac{\pi a^2}{4}$.

16. Determinar a área do domínio delimitado pela curva $\rho = a \cos 2\varphi$. Resp. $\frac{\pi a^2}{4}$.

17. Determinar a área do domínio delimitado pela curva $\rho = a \cos 3\varphi$. Resp. $\frac{\pi}{4}$.

18. Determinar a área do domínio delimitado pela curva $\rho = a \cos 4\varphi$. Resp. $\frac{\pi a^2}{4}$.

Cálculo de volumes

19. Fez-se rodar a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em torno do eixo Ox. Determinar o volume do sólido de revolução. Resp. $\frac{4}{3} \pi a b^2$.

20. Fez-se rodar o segmento de recta que reúne a origem e o ponto (a, b) em torno do eixo dos y. Determinar o volume do cone obtido. Resp. $\frac{1}{3} \pi a^2 b$.

21. Determinar o volume do toro gerado pela rotação do círculo $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ em torno do eixo Ox (supõe-se que $b \geqslant a$). Resp. $2\pi^2 a^2 b$.

22. Fez-se rodar o arco da parábole $y^2 = 2px$ limitada pela recta $x = a$ em torno do eixo Ox. Calcular o volume do corpo de revolução obtido. Resp. $\pi p a^2$.

23. A figura delimitada pela hipociclóide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ roda em torno do eixo Ox. Determinar o volume do corpo de revolução. Resp. $\frac{32\pi a^3}{105}$.

24. Determinar o volume gerado pela rotação em torno do eixo Ox dum arco de sinusóide $y = \operatorname{sen} x$. Resp. $\frac{\pi^2}{2}$.

25. A figura delimitada pela parábola $y^2 = 4x$ e a recta $x = 4$ roda em torno do eixo Ox. Determinar o volume do corpo de revolução Resp. 32π.

26. A figura delimitada pela curva $y = xe^x$ e as rectas $y = 0$, $x = 1$ roda em volta de Ox. Determinar o volume do corpo de revolução. Resp. $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$.

27. A figura delimitada por um arco da ciclóide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ e o eixo Ox gira em torno do eixo Ox. Determinar o volume do corpo de revolução. Resp. $5\pi^2a^3$.

28. A figura do problema 27 roda em torno do eixo Oy. Determinar o volume do corpo de revolução. Resp. $6\pi^2a^3$.

29. A figura do problema 27 gira em torno da recta que passa pelo vértice da ciclóide paralelamente ao eixo Oy. Determinar o volume do corpo de revolução. Resp. $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2 - 16)$.

30. A figura do problema 27 roda em torno da tangente no vértice da ciclóide. Determinar o volume do corpo de revolução. Resp. $7\pi^2a^3$.

31. Um cilindro de raio R é cortado por um plano que passa por um diâmetro da base sob um ângulo α com a base. Determinar o volume da parte troncada). Resp. $\frac{2}{3}R^3 \operatorname{tg} \alpha$.

32. Determinar o volume comum aos dois cilindros: $x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 + z^2 = R^2$. Resp. $\frac{16}{3}R^3$.

33. O ponto de intersecção das diagonais dum quadrado descreve o diâmetro duma circunferência de raio a, o plano do quadrado que permanece constantemente perpendicular ao plano da circunferência, e dois vértices opostos do quadrado que se apoia sobre esta circunferência (a grandeza do quadrado varia, evidentemente, durante o movimento). Determinar o volume do corpo gerado por este quadrado. Resp. $\frac{8}{3}a^3$.

34. Calcular o volume do segmento obtido cortando o parabolóide elíptico $\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2q}=x$ pelo plano $x = a$. Resp. $\pi a^2 \sqrt{pq}$.

35. Calcular o volume do corpo delimitado pelos planos $z = 0$, $y = 0$, as superfícies cilíndricas $x^2 = 2py$ e $z^2 = 2px$ e o plano $x = a$. Resp. $\frac{a^3\sqrt{2a}}{7\sqrt{p}}$ (no primeiro triedro).

36. Uma recta move-se paralelamente ao plano Oyz apoiando-se sobre as elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, encontrando-se, respectivamente, nos planos Oxy e Oxz. Calcular o volume do corpo obtido Resp. $\frac{8}{3}abc$.

Cálculo dos arcos

37. Determinar o comprimento total da hipociclóide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Resp. $6a$.

38. Calcular o comprimento do arco da parábola semi-cúbica $ay^2 = x^3$ da origem das coordenadas ao ponto de abcissa $x = 5a$. Resp. $\frac{335}{27} a$.

39. Determinar o comprimento da catenária $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ da origem ao ponto (x, y) Resp. $\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) = \sqrt{y^2 - a^2}$.

40. Determinar o comprimento dum arco de ciclóide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Resp. $8a$.

41. Determinar o arco da curva $y = \operatorname{Log} x$ entre os limites $x = \sqrt{3}$ e $x = \sqrt{8}$. Resp. $1 + \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{3}{2}$.

42. Determinar o comprimento da curva $y = 1 - \operatorname{Log} \cos x$ entre os limites $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{4}$. Resp. $\operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$.

43. Determinar o comprimento da primeira espira da espiral de Arquimedes $\rho = a\varphi$ a partir do pólo. Resp. $\pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \operatorname{Log}(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$.

44. Determinar o comprimento da espiral logarítmica $\rho = e^{\alpha\varphi}$ do pólo ao ponto (ρ, φ). Resp. $\frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha} e^{\alpha\varphi} = \frac{\rho}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2}$.

45. Determinar o comprimento total da curva $\rho = a \operatorname{sen}^3 \frac{\varphi}{3}$. Resp. $\frac{3}{2} \pi a$.

46. Determinar o comprimento da evoluta da elipse $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$; $y = \frac{c^2}{b} \operatorname{sen}^3 t$. Resp. $\frac{4(a^3 - b^3)}{ab}$.

47. Determinar o comprimento da cardióide $\rho = a(1 + \cos \varphi)$. Resp. $8a$.

48. Determinar o comprimento da evolvente do círculo $x = a(\cos \varphi + \varphi \operatorname{sen} \varphi)$, $y = a(\operatorname{sen} \varphi - \varphi \cos \varphi)$ de $\varphi = 0$ a $\varphi = \varphi_1$. Resp. $\frac{1}{2} a\varphi_1^2$.

Cálculo das áreas dos sólidos de revolução

49. Determinar a área da superfície obtida fazendo girar a parábola $y^2 = 4ax$ em torno do eixo Ox, da origem ao ponto da abcissa $x = 3a$. Resp. $\frac{56}{3} \pi a^2$.

50. Determinar a área do cone gerado pela rotação do segmento de recta $y = 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$: a) Em torno do eixo Ox. Resp. $8\pi \sqrt{5}$. b) Em torno do eixo Oy. Resp. $4\pi \sqrt{5}$.

51. Determinar a área do toro obtido fazendo girar o círculo $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ em torno do eixo Ox $(b > a)$. Resp. $4\pi^2 ab$.

52. Determinar a área da superfície de revolução gerada pela rotação da cardióide de equações paramétricas $x = a(2 \cos \varphi - \cos 2\varphi)$, $y = a(2 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} 2\varphi)$ em torno do eixo Ox. Resp. $\frac{128}{5} \pi a^2$.

53. Determinar a área da superfície obtida fazendo girar um arco da ciclóide $x = a(t - \text{sen}\, t)$; $y = a(1 - \cos t)$ em torno do eixo Ox. Resp. $\frac{64\pi a^2}{3}$.

54. Faz-se girar um arco da ciclóide (ver problema. 53) em volta do eixo Oy. Determinar a área da superfície de revolução. Resp. $16\pi^2 a^2 + \frac{64}{3}\pi a^2$.

55. O arco da ciclóide (problema 53) gira em volta da tangente no seu vértice. Determinar a área da superfície de revolução. Resp. $\frac{32\pi a^2}{3}$.

56. O astróide $x = a\,\text{sen}^3 t$, $y = a\cos^3 t$ gira em volta do eixo Ox. Determinar a área da superfície de revolução. Resp. $\frac{12\pi a^2}{5}$.

57. O arco de sinosóide $y = \text{sen}\, x$ de $x = 0$ a $x = 2\pi$ gira em volta do eixo Ox. Determinar a área da superfície de revolução. Resp. $4\pi\,[\sqrt{2} + \text{Log}\,(\sqrt{2} + 1)]$.

58. A elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ gira em volta do eixo Ox. Determinar a área da superfície de revolução. Resp. $2\pi b^2 + 2\pi ab\,\frac{\text{arc sen}\, e}{c}$, em que $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Diferentes aplicações do integral definido

59. Determinar o centro de gravidade do quarto de elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(x \geqslant 0$, $y \geqslant 0)$. Resp. $\frac{4a}{3\pi}$; $\frac{4b}{3\pi}$

60. Determinar o centro de gravidade da figura delimitada pela parábola $x^2 + 4y - 16 = 0$ e o eixo Ox. Resp. $\left(0;\ \frac{8}{5}\right)$.

61. Determinar o centro de gravidade duma meia esfera. Resp. Sobre o eixo de simetria, à distância de $\frac{3}{8}R$ da base.

62. Determinar o centro de gravidade da superfície duma semi-esfera. Resp. Sobre o eixo de simetria, à distância $\frac{R}{2}$ da base.

63. Determinar o centro de gravidade da superfície dum cone circular recto cujo raio da base é R e a altura é h. Resp. Sobre o eixo de simetria, à distância $\frac{h}{3}$ da base.

64. Determinar o centro de gravidade da superfície plana limitada pelas curvas $y = \text{sen}\, x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$, $y = 0$. Resp. $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{8}\right)$.

65. Determinar o centro de gravidade duma área plana delimitada pelas parábolas $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$. Resp. (9; 9).

66. Determinar o centro de gravidade da área dum sector circular do ângulo ao centro 2α e de raio R. Resp. Sobre o eixo de simetria, à distância $\frac{2}{3}R\,\frac{\text{sen}\,\alpha}{\alpha}$ do vértice do sector.

67. Determinar a grandeza de pressão da água sobre um rectângulo que aí foi lançado verticalmente: a base é de 8 m, a altura de 12 m e a base superior encontra-se a 5 m da superfície, paralelamente a esta última. Resp. 1056 toneladas.

68. O bordo superior duma represa quadrada de 8 m de lado encontra-se à superfície da água. Qual é a pressão exercida pela água sobre cada um dos triângulos da represa obtidos traçando uma diagonal do quadrado. Resp. 85 333,33 kg, 170 666,67 kg.

69. Calcular o trabalho necessário para bombar água contida num reservatório em forma de semi-esfera de 20 m de diâmetro. Resp. $2{,}5 \cdot 16^6 \pi$ kgm.

70. Um corpo está animado dum movimento rectilínio, segundo a lei $x = ct^3$, em que x é o caminho percorrido durante o tempo t, $c =$ const. A resistência do meio é proporcional ao quadrado da velocidade, o coeficiente de proporcionalidade é k. Calcular o trabalho devido à resistência ao avanço quando o corpo passa do ponto $x = 0$ ao ponto $x = a$. Resp. $\frac{27}{7} k \sqrt[3]{c^2 a^7}$.

71. Calcular o trabalho dispendido para bombar um líquido de densidade γ contido num reservatório cónico, com o vértice voltado para baixo, de altura H e de raio da base R. Resp. $\frac{\pi \gamma R^2 H^2}{12}$.

72. Um flutuador de madeira cilíndrico cuja superfície da base é $S = 4000 \text{ cm}^2$ e a altura $H = 50$ cm flutua sobre a água. Qual é o trabalho dispendido para o tirar da água? (o peso específico da madeira é de 0,8). Resp. $\frac{\gamma^2 H^2 S}{2} = 32$ kgm.

73. Calcular a pressão total exercida pela água sobre uma barragem em forma de trapézio isósceles, de dimensões: base superior $a = 6{,}4$ m, base inferior $b = 4{,}2$ m, altura $H = 3$ m. Resp. 22,2 toneladas.

74. Determinar a componente axial P kg da pressão total do vapor exercido sobre o fundo esférico duma caldeira. O diâmetro da parte cilíndrica da caldeira é de D mm, a pressão do vapor na caldeira P kg/cm². Resp. $P = \frac{\pi p D^2}{400}$.

75. Uma árvore vertical de raio r é sustentada por uma tela plana. O peso P da árvore está uniformemente repartido sobre toda a superfície de apoio. Calcular o trabalho total das forças de atrito quando a árvore gira uma volta. O coeficiente de atrito é μ. Resp. $\frac{4}{3} \pi \mu P r$.

76. Uma árvore vertical termina por um tronco de cone. A pressão específica deste tronco de cone sobre a tela é constante e igual a P. O diâmetro superior do cone troncado é D. o diâmetro inferior d, o ângulo no vértice 2α. O coeficiente de atrito é μ. Calcular o trabalho das forças de atrito para uma volta da árvore. Resp. $\frac{\pi^2 P \mu}{6 \operatorname{sen} \alpha} (D^3 - d^3)$.n

77. Um tronco prismático de comprimento l estende-se progressivamente sob a acção duma força crescente de O a P de maneira que a força de extensão é equilibrada em cada instante pelas forças elásticas do tronco. Calcular o trabalho A da força de extensão, supondo que o prolongamento é elástico. A secção transversal do tronco é F, o módulo de elasticidade do material E.

Indicação — Se x é o prolongamento e f a força aplicada, tem-se $f=\frac{FE}{l}x$. O prolongamento sob a acção da força P é $\Delta l=\frac{Pl}{EF}$.

Resp. $A=\frac{P\Delta l}{2}=\frac{P^2 l}{2EF}$.

78. Uma barra prismática está suspensa verticalmente e uma força de extensão P está aplicada à sua extremidade inferior. Calcular o prolongamento da barra sob a acção do seu próprio peso e da força P, conhecendo o comprimento da barra em repouso l, a secção transversal F, o seu peso Q é o módulo de elasticidade do material E. Resp. $\Delta l=\frac{(Q+2P)\,l}{2EF}$.

79. Calcular o tempo durante o qual se vaza um reservatório prismático cheio até ao nível H. A secção transversal é F, a secção de abertura f, a velocidade de vazamento é dada pela fórmula $v=\mu\sqrt{2gh}$, em que μ é o coeficiente de viscosidade, g a aceleração da força de gravidade, h a distância da abertura ao nível do líquido. Resp. $T=\frac{2FH}{\mu f\sqrt{2gH}}=$
$=\frac{F}{\mu f}\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

80. Determinar o débito Q de água (quantidade de água evacuada durante a unidade de tempo) através dum escoadouro de secção rectangular. A altura do escoadouro é h, a sua largura b. Resp. $Q=\frac{2}{3}\mu bh\sqrt{2gh}$.

81. Determinar o débito Q de água que rola através duma abertura rectangular lateral de altura a e de largura b, sendo H a altura da superfície do lado interior do rectângulo. Resp. $Q=\frac{2b\mu\sqrt{2g}}{3}\times[H^{3/2}-(H-a)^{3/2}]$.

ANEXO I

Estabelecimento duma dependência funcional a partir dos dados experimentais pelo método dos mínimos quadrados

Suponhamos que se deve estabelecer, segundo os dados experimentais, a dependência funcional que permite exprimir a grandeza y em função da grandeza x:

$$y = \varphi(x). \tag{1}$$

Os resultados experimentais forneceram-nos n valores da função y para os valores correspondentes da variável independente. Estabeleçamos, como se segue, o quadro desses valores:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

A forma da função $x = \varphi(x)$ é estabelecida ou com o apoio de considerações teóricas, ou segundo a disposição no plano das coordenadas dos pontos correspondentes aos valores experimentais. (Estes pontos chamar-se-ão «pontos experimentais».) Suponhamos, por exemplo, que os pontos experimentais estão situados no plano das coordenadas da maneira indicada na figura 243*a*. Tendo em atenção o facto de que no decorrer do desenvolvimento da experiência, se podem cometer erros, é natural supor que a função incógnita $y = \varphi(x)$ possa ser procurada sob a forma duma função linear $y = ax + b$.

Se os pontos experimentais estão dispostos como está indicado na figura 243*b*, é natural procurar a função $y = \varphi(x)$ sob a forma $y = ax^b$, etc.

Quando a forma da função $y = \varphi(x, a, b, c, \ldots)$ é escolhida, resta calcular os parâmetros $a, b, c, \ldots,$ dessa função, de maneira que num certo sentido ela descreva da melhor maneira o processo considerado.

Um método largamente aplicado na resolução deste problema é o *método dos mínimos quadrados*. Ele consiste no que se segue. Consideremos os quadrados das diferenças entre os valores y_i obtidos experimentalmente e os valores da função $\varphi(x, a, b, c, \ldots,)$ nos pontos correspondentes:

$$S(a, b, c, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]^2. \tag{2}$$

Escolhamos os parâmetros $a, b, c, \ldots,$ de modo que esta soma tenha um valor mínimo:

$$S(a, b, c, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]^2 = \min. \tag{3}$$

O problema reduz-se, assim, a determinar os valores dos parâmetros a, b, c, ..., para os quais a função S (a b, c, ...) admite um mínimo:

Resulta do teorema 1 (Cap. VIII, máximo e mínimo) que estes valores a, b, c, ..., verificam o sistema de equações

$$\frac{\partial S}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial S}{\partial b}=0, \quad \frac{\partial S}{\partial c}=0, \ldots, \tag{4}$$

ou sob uma forma explícita:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]\dfrac{\partial\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)}{\partial a}=0,\\
\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]\dfrac{\partial\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)}{\partial b}=0,\\
\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)]\dfrac{\partial\varphi(x_i, a, b, c, \ldots)}{\partial c}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \tag{5}$$

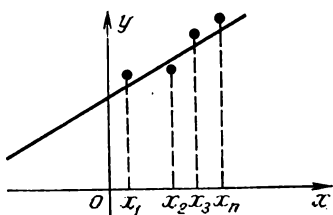
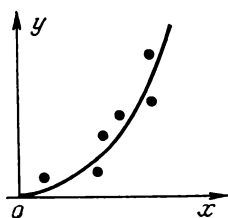
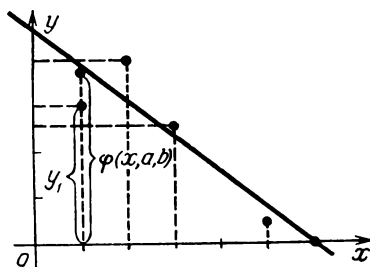



Fig. 243*a*

Fig. 243*b*

Fig. 243*c*

O número de equações é aqui igual ao das incógnitas. Em cada caso concreto analisa-se o problema da existência da solução do sistema de equações (5) e da existência do mínimo da função $S(a, b, c, \ldots)$.

Consideremos certos casos de determinação da função $y = \varphi(x, a, b, c, \ldots)$.

I. Seja $y = ax + b$. Neste caso a função $S(a, b)$ é da forma (confrontar a expressão (2)):

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2. \quad (6)$$

É uma função de duas variáveis a e b (x_i e y_i são os números dados: cf. o quadro anterior). Por conseguinte:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]\, x_i = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)] = 0, \end{aligned}\right\}$$

isto é, o sistema de equações (5) é neste caso da forma:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b \sum_{i=1}^{n} x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i - bn &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Obtivemos um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas a e b. É evidente que este sistema tem uma solução determinada e que para o valores encontrados a e b a função $S(a, b)$ admite um mínimo (*).

II. Suponhamos que tínhamos escolhido na qualidade de função de aproximação o trinómio do segundo grau

$$y = ax^2 + bx + c.$$

(*) Isto pode ser também fàcilmente estabelecido com o apoio das condições suficientes (teor. 2, Cap. VIII, máx. e mín. duma função). Com efeito, aqui

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a\, \partial b} = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i; \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n.$$

Por conseguinte,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a\, \partial b} \right)^2 = 4n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(2 \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 =$$

$$= 4 \sum_{\substack{i, j; \\ i<j}} (x_i - x_j)^2 > 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0.$$

Neste caso, a expressão (2), é da forma:

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2. \tag{8}$$

É uma função de três variáveis *a, b. c.* O sistema das equações (5) escreve-se, então:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]\, x_i^2 = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]\, x_i = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0,
\end{aligned}\right\}$$

ou sob a forma explícita:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 - a \sum_{i=1}^{n} x_i^4 - b \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - c \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - c \sum_{i=1}^{n} x_i = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n} y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b \sum_{i=1}^{n} x_i - cn = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Obtemos um sistema de equações lineares para determinar as incógnitas *a, b, c.* Resulta da natureza do problema que o sistema possui, uma solução determinada e que para os valores obtidos *a, b, c* a função $S(a, b, c)$ admite um mínimo.

Exemplo — Suponhamos que a experiência nos tenha fornecido quatro valores da função $y = \varphi(x)$ para os quatro valores da variável independente $(n = 4)$ apresentadas sob a forma de quadro:

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

Procuraremos a função φ sob a forma de função linear $y = ax + b$. Formemos a expressão $S(a, b)$:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{4} [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

Para formar o sistema (7) com o fim de determinar os coeficientes a e b calculemos, primeiramente:

$$\sum_{i=1}^{4} y_i x_i = 21 ; \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 39 ; \quad \sum_{i=1}^{4} x_i = 11 ; \quad \sum_{i=1}^{4} y_i = 10.$$

O sistema (2) põe-se sob a forma:

$$\left.\begin{aligned} 21 - 39a - 11b = 0, \\ 10 - 11a - 4b = 0. \end{aligned}\right\}$$

Resolvendo este sistema, encontramos a e b:

$$a = -\frac{26}{35}, \quad b = \frac{159}{35} .$$

A recta procurada, (fig. 243c), é

$$y = -\frac{26}{35} x + \frac{159}{35} .$$

ANEXO II

Fórmula de Interpolação de Newton. Derivação numérica

Suponhamos que são conhecidos $(n + 1)$ valores $y_0, y_1, \dots y_n$ da função $\varphi(x)$ para os $(n + 1)$ valores da variável independente $x_0, x_1, \dots, x_n$. A diferença entre os valores consecutivos da variável independente supõe-se constante. Designemo-la por h. Podemos assim estabelecer o quadro seguinte dos valores da função desconhecida $y = \varphi(x)$ para os valores correspondentes da variável independente.

x	x_0	$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_0 + 2h$	...	$x_n = x_n + nh$
y	y_0	y_1	y_2	...	y_n

Formemos um polinómio de grau não superior a n que toma os valores correspondentes de y para os valores correspondentes de x. Este polinómio representará, aproximadamente, a função $\varphi(x)$.

Introduzamos, primeiramente, as notações:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2, \dots,$$

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \dots,$$

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0.$$

É o que se chama diferenças de 1.ª, 2.ª, ..., n ordem. Escrevamos o polinómio que formam os valores y_0, y_1, respectivamente, para x_0, x_1.

Este será o polinómio do 1.° grau.

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h}. \tag{1}$$

Com efeito,

$$P_1(x)\,|_{x=x_0} = y_0, \quad P_1\,|_{x=x_1} = y_0 + \Delta y_0 \frac{h}{h} = y_0 + (y_1 - y_0) = y_1.$$

Escrevamos o polinómio que forma os valores y_0, y_1, y_2, respectivamente, para x_0, x_1, x_2.

Este será um polinómio do 2.° grau.

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right). \tag{2}$$

De facto,

$$P_2 |_{x=x_0} = y_0, \quad P_2 |_{x=x_1} = y_1,$$

$$P_2 |_{x=x_0} = y_0 + \Delta y_0 \cdot 2 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{2h}{h} \left(\frac{2h}{h} - 1\right) = y_2.$$

O polinómio de terceira ordem será da forma:

$$P_3(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right) \left(\frac{x - x_0}{h} - 2\right). \tag{3}$$

Finalmente, o polinómio de ordem n que toma os valores y_0, y_1, y_2, ..., y_n, respectivamente, x_0, x_1, x_2, ..., x_n, será da forma:

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} \frac{x - x_0}{h} \left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right) \dots \left[\frac{x - x_0}{h} - (n-1)\right], \tag{4}$$

o que se pode verificar por substituição directa. É o que se chama a *fórmula de interpolação* ou o *polinómio de interpolação de Newton.*

De facto, para este quadro, o polinómio de Lagrange e o polinómio de Newton são idênticos, se bem que diferentemente escritos, porque o polinómio de grau não superior a n que toma $n + 1$ valores dados para os $n + 1$ valores dados de x, é determinado unìvocamente.

Em numerosos casos o polinómio de interpolação de Newton é mais cómodo do que o polinómio de interpolação de Lagrange. A particularidade deste polinómio reside no facto de que ao passar do polinómio do grau k ao polinómio do grau $(k + 1)$ os $(k + 1)$ primeiros termos não são modificados; só um novo termo se vem juntar que é igual a zero para todos os valores anteriores da variável independente.

Nota — Segundo as fórmulas de interpolação de Lagrange (conforme a fórmula (3), § 10) e de Newton (fórmula (4)) os valores da função são determinados sobre o intervalo $x_0 < x < x_n$. Se se determina segundo estas fórmulas o valor da função $x < x_0$ (pode-se fazê-lo para baixos valores de $|x - x_0|$), diz-se, então que se efectua uma *extrapolação do quadro no passado.* Se se determina o valor da função para $x_n < x$, diz-se que se efectua uma *extrapolação do quadro no futuro.*

Suponhamos que os valores de uma certa função incógnita $\varphi(x)$ são dados pelo quadro apresentado no começo deste anexo. Pede-se, para determinar aproximadamnte a derivada desta função. Este problema resolve-se da maneira seguinte. Constrói-se o polinómio de interpolação de Lagrange ou de Newton e determina-se a derivada deste polinómio.

Como a maior parte das vezes se considera quadros para os quais as diferenças entre os valores consecutivos da variável independente são constantes, utilizaremos a fórmula de interpolação de Newton. Sejam dados três valores da função y_0, y_1, y_2 para os valores x_0, x_1, x_2 da variável independente. Escrevamos, então, o polinómio (2) e derivemo-lo. Obtemos o valor aproximado da derivada da função sobre o segmento $x_0 \leqslant x \leqslant x_2$

$$\varphi'(x) \cong P_2'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h} \left(2 \frac{x - x_0}{h} - 1\right). \tag{5}$$

Para $x = x_0$, obtemos

$$\varphi'(x_0) \approx P_2'(x_0) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h}. \tag{6}$$

Se considerarmos o polinómio do 3.º grau (3), obtemos, para derivada a expressão:

$$\varphi'(x) \approx P_3'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h}\left(2\,\frac{x-x_0}{h} - 1\right) +$$
$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{2\cdot 3h}\left[3\left(\frac{x-x_0}{h}\right)^2 - 6\left(\frac{x-x_0}{h}\right) + 2\right]. \qquad (7)$$

Em particular, para $x = x_0$, obtemos:

$$\varphi'(x_0) \approx P_3'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h}. \qquad (8)$$

Se utilizarmos a fórmula (4), obtemos, para a expressão aproximada da derivada para $x = x_0$

$$\varphi'(x_0) \approx P_n'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h} - \frac{\Delta^4 y_0}{4h} + \ldots \qquad (9)$$

Notemos que para as funções que têm derivadas, a diferença Δy_0 é um infinitamente pequeno de primeira ordem, $\Delta^2 y_0$ um infinitamente pequeno da segunda ordem, $\Delta^3 y_0$ um infinitamente pequeno de terceira ordem e assim sucessivamente, em relação a h.

ÍNDICE ALFABÉTICO